Харків
Видавнича група «Основа»
2015

УДК 512
ББК 22.14
К26

Карпік В. В.

К26 Тестовий контроль. Геометрія. Підготовка до ЗНО. — Х. : Вид. група «Основа», 2015. — 108, (4) с. (Б-ка журн. «Математика в школах України»; Вип. 10 (154)).

ISBN 978-617-00-2537-1.

Пропонований посібник призначений для підготовки випускників загальноосвітніх шкіл до зовнішнього незалежного оцінювання з математики на базовому та поглибленому рівнях.

Посібник укладений відповідно до чинної програми з математики та ЗНО-2015.

Для вчителів загальноосвітніх шкіл.

УДК 512
ББК 22.14

ISBN 978-617-00-2537-1

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА

Пропонований посібник призначений для підготовки випускників загальноосвітніх шкіл до зовнішнього незалежного оцінювання з математики на базовому та поглибленому рівнях.

Посібник укладений відповідно до чинної програми з математики та ЗНО-2015.

Посібник містить 25 дворівневих міні-тестів за всіма темами курсу математики у двох рівноцінних варіантах і 2 тести у форматі ЗНО-2015. Кожна робота складається із завдань чотирьох різних форм:

- ✓ завдання з вибором однієї правильної відповіді;
- ✓ завдання на встановлення відповідності (логічні пари);
- ✓ завдання відкритої форми з короткою відповіддю;
- ✓ завдання відкритої форми з розгорнутою відповіддю.

Крім того, серед завдань відкритої форми є структуровані завдання.

До всіх завдань наведено відповіді.

Виконання одного варіанта міні-тесту базового рівня (завдання 1–10) розраховане орієнтовно на 45 хвилин, одного варіанта міні-тесту поглибленого рівня (завдання 1–12, 10 завдань базового рівня і 2 завдання поглибленого рівня) — орієнтовно на 70–75 хвилин, підсумкового тесту базового рівня (30 завдань) — на 130 хвилин, а підсумкового тесту поглибленого рівня (36 завдань, 30 завдань тесту базового рівня та 6 завдань — поглибленого рівня) — на 210 хвилин (130 хвилин на виконання завдань базового рівня та 80 хвилин на виконання завдань поглибленого рівня).

Перед виконанням кожного міні-тесту учні повинні систематизувати та узагальнити відповідний теоретичний матеріал, виконати типові завдання.

Схему оцінювання міні-тестів базового рівня наведено в таблиці 1.

Таблиця 1

Номери завдань	Кількість балів	Усього
1–6	по 1 балу	6 балів
7	4 бали	4 бали

Номери завдань	Кількість балів	Усього
8.1, 8.2	по 1 балу	2 бали
9, 10	по 2 бали	4 бали
Усього балів		16 балів

Відповідність кількості набраних балів учнем, який виконував міні-тест базового рівня, оцінці за 12-бальною системою оцінювання навчальних досягнень учнів наведено в таблиці 2.

Таблиця 2

Кількість набраних балів	1	2	3	4	5	6, 7	8, 9	10, 11	12, 13	14	15	16
Оцінка за 12-бальною системою оцінювання	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

Схему оцінювання міні-тестів поглибленого рівня наведено в таблиці 3.

Таблиця 3

Номери завдань	Кількість балів	Усього
1–6	по 1 балу	6 балів
7	4 бали	4 бали
8.1, 8.2	по 1 балу	2 бали
9–11	по 2 бали	6 балів
12	4 бали	4 бали
Усього балів		22 бали

Відповідність кількості набраних балів учнем, який виконував міні-тест поглибленого рівня, оцінці за 12-бальною системою оцінювання навчальних досягнень учнів наведено в таблиці 4.

Таблиця 4

Кількість набраних балів	1	2, 3	4, 5	6, 7	8, 9	10, 11	12, 13	14, 15	16, 17	18, 19	20, 21	22
Оцінка за 12-бальною системою оцінювання	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

Схему оцінювання підсумкового тесту базового рівня наведено в таблиці 5.

Таблиця 5

Номери завдань	Кількість балів	Усього
1–20	по 1 балу	20 балів
21–24	по 4 бали	16 балів
25.1, 25.2, 26.1, 26.2	по 1 балу	4 бали
27–30	по 2 бали	8 балів
Усього балів		48 балів

Схему оцінювання підсумкового тесту поглибленого рівня наведено в таблиці 6.

Таблиця 6

Номери завдань	Кількість балів	Усього
1–20	по 1 балу	20 балів
21–24	по 4 бали	16 балів
25.1, 25.2, 26.1, 26.2	по 1 балу	4 бали
27–34	по 2 бали	16 балів
35	4 бали	4 бали
36	6 балів	6 балів
Усього балів		66 балів

РОЗДІЛ 1. ПЛАНІМЕТРІЯ

ТЕСТ 1
Найпростіші геометричні фігури. Трикутники

Варіант 1

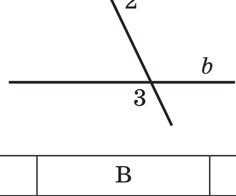
Базовий рівень

Завдання 1–6 мають по п’ять варіантів відповіді, серед яких лише ОДИН ПРАВИЛЬНИЙ. Виберіть правильну, на вашу думку, відповідь і позначте її у бланку відповідей.

1. Укажіть ПРАВИЛЬНЕ твердження.

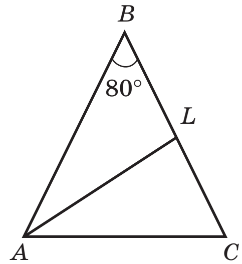
А	Через точку, що не лежить на поданій прямій, можна провести на площині більш ніж одну пряму, паралельну поданій
Б	Будь-які дві прямі на площині можуть мати не менше ніж дві спільні точки
В	Якщо пряма перпендикулярна до однієї з двох паралельних прямих, то вона паралельна другій
Г	Якщо дві прямі на площині перпендикулярні до третьої прямої, то вони паралельні одна одній
Д	На будь-якій півпрямій від її початкової точки можна відкласти тільки два відрізки поданої довжини

2. Пряма c перетинає паралельні прямі a і b (*див. рис.*). Знайдіть $\angle 3$, якщо $\angle 1 + \angle 2 = 140°$.



А	Б	В	Г	Д
40°	160°	110°	70°	140°

3. У рівнобедреному трикутнику ABC $(AB = BC)$ кут B дорівнює $80°$, AL — бісектриса кута A (*див. рис.*). Знайдіть градусну міру кута CAL.

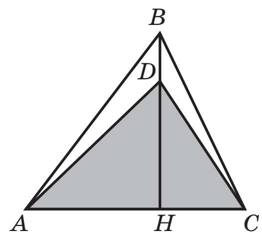


А	Б	В	Г	Д
$40°$	$50°$	$10°$	$20°$	$25°$

4. Коло, діаметр якого дорівнює $8\sqrt{2}$ см, описане навколо трикутника ABC, $\angle ABC = 45°$. Знайдіть довжину сторони AC.

А	Б	В	Г	Д
4 см	8 см	16 см	$4\sqrt{2}$ см	$4\sqrt{6}$ см

5. На висоті BH трикутника ABC позначено точку D так, що $DH = 3BD$ (*див. рис.*). Знайдіть площу трикутника ACD, якщо $BH = 24$ см, $AC = 30$ см.



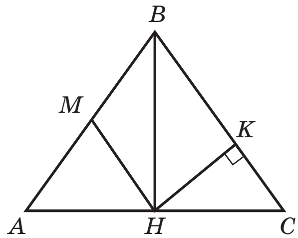
А	Б	В	Г	Д
240 см^2	120 см^2	540 см^2	270 см^2	180 см^2

6. Сторони трикутника дорівнюють 2 см, 5 см і 6 см. Знайдіть косинус НАЙБІЛЬШОГО кута цього трикутника.

А	Б	В	Г	Д
$-\frac{19}{20}$	$\frac{19}{20}$	$\frac{7}{20}$	$-\frac{7}{10}$	$-\frac{7}{20}$

Завдання 7 передбачає встановлення відповідності. До кожного рядка, позначеного ЦИФРОЮ, доберіть один відповідник, позначений БУКВОЮ, і поставте позначки в бланку відповідей на перетині відповідних рядків (цифри) і стовпців (букви).

7. На рисунку зображено рівнобедрений трикутник ABC з основою AC, BH — бісектриса цього трикутника, HM — медіана трикутника ABH, HK — висота трикутника BCH, $AB=10$, $AC=12$. Установіть відповідність між трикутником (1–4) та його периметром (А–Д).



1	Трикутник AHM	А	14,4
2	Трикутник ABH	Б	15,8
3	Трикутник BHM	В	16
4	Трикутник CHK	Г	18
		Д	24

Розв'яжіть завдання 8–10. Одержані відповіді запишіть у зошиті та бланку відповідей.

8. На сторонах AB і BC трикутника ABC, площа якого дорівнює 360 см^2, а радіус вписаного кола — 8 см, позначено точки D і E відповідно, $AD:DB=CE:EB=3:7$.

1. Знайдіть периметр трикутника ABC (у см).

2. Знайдіть периметр трикутника BDE (у см).

9. Катет прямокутного трикутника дорівнює 5 см, а медіана, проведена до гіпотенузи, — 6,5 см. Знайдіть периметр цього трикутника (у см).

10. У рівнобедреному трикутнику ABC $(AB=BC)$ проведено бісектрису AL, $BL=\dfrac{169}{23}$ см, $CL=\dfrac{130}{23}$ см. Знайдіть площу трикутника ABC (у см^2).

Поглиблений рівень

Розв'яжіть завдання 11. Одержану відповідь запишіть у зошиті та бланку відповідей.

11. У гострокутному трикутнику ABC із вершин A і C на сторони BC і AB проведені висоти AH і CT. Знайдіть сторону AC, якщо периметр трикутника ABC дорівнює 51, периметр трикутника BHT — 24, а радіус кола, описаного навколо трикутника BHT, — 3,4.

Розв'язання завдання 12 повинно мати обґрунтування. Запишіть послідовні логічні дії та пояснення, зробіть посилання на математичні факти, із яких випливає те чи інше твердження. Якщо потрібно, проілюструйте розв'язання завдань рисунками, графіками, схемами, таблицями.

12. У прямокутному трикутнику ABC із прямим кутом C проведено бісектрису BD,

$$AC = 2\sqrt{3}\ \text{см},\ BC = 2\ \text{см}.$$

1. Доведіть, що центр кола, вписаного в трикутник ABD, лежить на медіані, проведеній із вершини D.

2. Знайдіть відстань між центрами двох кіл, вписаних у трикутники ABD і BCD.

Варіант 2

Базовий рівень

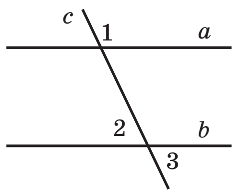
Завдання 1–6 мають по п'ять варіантів відповіді, серед яких лише ОДИН ПРАВИЛЬНИЙ. Виберіть правильну, на вашу думку, відповідь і позначте її у бланку відповідей.

1. Укажіть НЕПРАВИЛЬНЕ твердження.

А	Який би не був промінь на площині, існують точки, що належать цьому променю, і точки, що не належать йому
Б	Через будь-які дві точки на площині можна провести пряму, і тільки одну
В	Із будь-якої точки, що не лежить на поданій прямій, можна опустити на цю пряму перпендикуляр, і тільки один
Г	Дві прямі, паралельні третій, паралельні одна одній
Д	Будь-які відрізок і промінь на площині обов'язково перетинаються

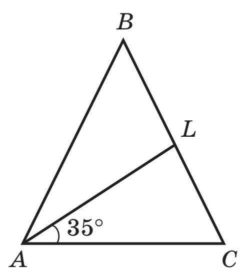
2. Пряма c перетинає паралельні прямі a і b (*див. рис.*). Знайдіть $\angle 1$, якщо

$$\angle 2 + \angle 3 = 100^\circ.$$



А	Б	В	Г	Д
155°	80°	50°	130°	100°

3. У рівнобедреному трикутнику ABC $(AB = BC)$ AL — бісектриса кута A (*див. рис.*), кут CAL дорівнює 35°. Знайдіть градусну міру кута ABC.



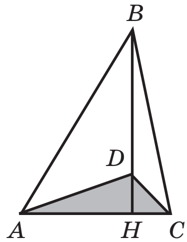
А	Б	В	Г	Д
110°	40°	20°	50°	70°

4. Коло, діаметр якого дорівнює $12\sqrt{3}$ см, описане навколо трикутника ABC, $\angle BAC = 60^\circ$. Знайдіть довжину сторони BC.

А	Б	В	Г	Д
9 см	$6\sqrt{3}$ см	24 см	18 см	$24\sqrt{3}$ см

5. На висоті BH трикутника ABC позначено точку D так, що $BD = 4DH$ (*див. рис.*). Знайдіть площу трикутника ACD, якщо

$$BH = 20 \text{ см}, \ AC = 16 \text{ см}.$$



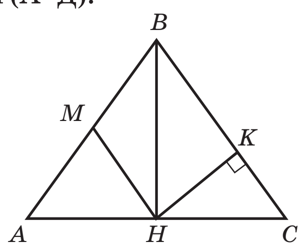
А	Б	В	Г	Д
320 см^2	32 см^2	64 см^2	40 см^2	80 см^2

6. Сторони трикутника дорівнюють 3 см, 7 см і 8 см. Знайдіть косинус НАЙБІЛЬШОГО кута цього трикутника.

А	Б	В	Г	Д
$-\frac{2}{7}$	$\frac{13}{14}$	$-\frac{13}{14}$	$-\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$

Завдання 7 передбачає встановлення відповідності. До кожного рядка, позначеного ЦИФРОЮ, доберіть один відповідник, позначений БУКВОЮ, і поставте позначки в бланку відповідей на перетині відповідних рядків (цифри) і стовпців (букви).

7. На рисунку зображено рівнобедрений трикутник ABC з основою AC, BH — бісектриса цього трикутника, HM — медіана трикутника ABH, HK — висота трикутника BCH, $AB = 25$, $AC = 30$. Установіть відповідність між трикутником (1–4) та його периметром (А–Д).



1	Трикутник AHM	А	60
2	Трикутник BHM	Б	45
3	Трикутник BCH	В	40
4	Трикутник CHK	Г	36
		Д	30

Розв'яжіть завдання 8–10. Одержані відповіді запишіть у зошиті та бланку відповідей.

8. На сторонах AC і BC трикутника ABC, площа якого дорівнює 180 см², а радіус вписаного кола — 8 см, позначено точки N і P відповідно,

$$AN : NC = BP : PC = 2 : 3.$$

1. Знайдіть периметр трикутника ABC (у см).

2. Знайдіть периметр трикутника CNP (у см).

9. Катет прямокутного трикутника дорівнює 24 см, а медіана, проведена до гіпотенузи, — 12,5 см. Знайдіть периметр цього трикутника (у см).

10. У рівнобедреному трикутнику ABC $(AB = BC)$ проведено бісектрису AL,

$$BL = \frac{289}{33}\ \text{см},\ CL = \frac{272}{33}\ \text{см}.$$

Знайдіть площу трикутника ABC (у см²).

Поглиблений рівень

Розв'яжіть завдання 11. Одержану відповідь запишіть у зошиті та бланку відповідей.

11. У гострокутному трикутнику ABC із вершин A і B на сторони BC і AC проведені висоти AE і BF. Знайдіть радіус кола, описаного навколо трикутника ABC, якщо його периметр дорівнює 60, периметр трикутника CEF — 36, а довжина сторони EF трикутника CEF — 11,52.

Розв'язання завдання 12 повинно мати обґрунтування. Запишіть послідовні логічні дії та пояснення, зробіть посилання на математичні факти, із яких випливає те чи інше твердження. Якщо потрібно, проілюструйте розв'язання завдань рисунками, графіками, схемами, таблицями.

12. У прямокутному трикутнику BC із прямим кутом C проведено бісектрису AD,

$$AB = 2\sqrt{3}\ \text{см},\ BC = 3\ \text{см}.$$

1. Доведіть, що центр кола, вписаного в трикутник ABD, лежить на бісектрисі, проведеній із вершини D.

2. Знайдіть відстань між центрами двох кіл, вписаних у трикутники ABD і ACD.

ТЕСТ 2
Чотирикутники. Многокутники

Варіант 1

Базовий рівень

Завдання 1–6 мають по п'ять варіантів відповіді, серед яких лише ОДИН ПРАВИЛЬНИЙ. Виберіть правильну, на вашу думку, відповідь і позначте її у бланку відповідей.

1. Укажіть ПРАВИЛЬНЕ твердження.

А	У будь-якому паралелограмі сума кутів, прилеглих до однієї сторони, дорівнює $90°$
Б	Якщо в будь-якому чотирикутнику є два прямі кути, то він є прямокутником
В	Діагоналі будь-якого ромба рівні
Г	Діагоналі будь-якої рівнобічної трапеції перпендикулярні
Д	У будь-якій рівнобічній трапеції кути при основі рівні

2. У паралелограмі $ABCD$ $\angle A+\angle C=2\alpha$. Укажіть формулу, за якою можна обчислити кут B цього паралелограма.

А	Б	В	Г	Д
$\angle B=360°-\alpha$	$\angle B=180°-2\alpha$	$\angle B=180°-\alpha$	$\angle B=90°-\alpha$	$\angle B=360°-2\alpha$

3. Діагоналі AC і BD ромба $ABCD$ перетинаються в точці O, $AC=8$ см, $AD=5$ см. Знайдіть $\operatorname{tg}\angle BAO$.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{5}{8}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{3}$

4. Скільки сторін має опуклий многокутник, сума внутрішніх кутів якого дорівнює $3600°$?

А	Б	В	Г	Д
23	22	20	18	17

5. У прямокутну трапецію, бічні сторони якої дорівнюють 6 см і 10 см, вписано коло. Знайдіть площу цієї трапеції.

А	Б	В	Г	Д
60 см^2	30 см^2	80 см^2	96 см^2	48 см^2

6. У паралелограмі $ABCD$ проведено бісектрису AL, $BL = 6$ см, $CL = 8$ см, $\angle A = 30°$. Знайдіть площу цього паралелограма.

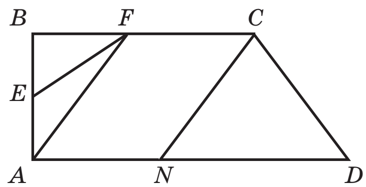
А	Б	В	Г	Д
56 см^2	$56\sqrt{3}$ см^2	42 см^2	$42\sqrt{3}$ см^2	24 см^2

Завдання 7 передбачає встановлення відповідності. До кожного рядка, позначеного ЦИФРОЮ, доберіть один відповідник, позначений БУКВОЮ, і поставте позначки в бланку відповідей на перетині відповідних рядків (цифри) і стовпців (букви).

7. На рисунку зображено прямокутну трапецію $ABCD$,

$$\angle A = \angle B = 90°,\ AB = 4,\ AD = 9,\ CD = 5,$$

точки E і F — середини сторін AB і BC відповідно, $CN \parallel AF$. Установіть відповідність між многокутником (1–4) та його площею (А–Д).



1	Чотирикутник $ABCN$	А	12
2	Чотирикутник $AFCD$	Б	18
3	П'ятикутник $AEFCD$	В	20
4	Чотирикутник $AFCN$	Г	24
		Д	27

Розв'яжіть завдання 8–10. Одержані відповіді запишіть у зошиті та бланку відповідей.

8. Висота BH ромба $ABCD$ ділить сторону CD на відрізки CH і HD, $CH = 5$ см, $HD = 8$ см.

1. Знайдіть висоту BH ромба $ABCD$ (у см).

2. Знайдіть площу ромба $ABCD$ (у см^2).

9. На стороні BC прямокутника $ABCD$ позначено точку E. Знайдіть периметр чотирикутника $AECD$ (у см), якщо $AE = 17$ см, $BC = 18$ см, $EC = 10$ см.

10. Периметр рівнобічної трапеції дорівнює 62 см, а її основи — 6 см і 22 см. Знайдіть площу цієї трапеції (у см^2).

Поглиблений рівень

Розв'яжіть завдання 11. Одержану відповідь запишіть у зошиті та бланку відповідей.

11. Навколо трапеції описане коло, діаметром якого є більша основа трапеції. Обчисліть площу цієї трапеції, якщо її бічна сторона дорівнює 15, а висота — 12.

Розв'язання завдання 12 повинно мати обґрунтування. Запишіть послідовні логічні дії та пояснення, зробіть посилання на математичні факти, із яких випливає те чи інше твердження. Якщо потрібно, проілюструйте розв'язання завдань рисунками, графіками, схемами, таблицями.

12. Точки K, L, M і N — середини сторін опуклого чотирикутника $ABCD$, діагоналі чотирикутника $KLMN$ рівні і перетинаються в точці O, кут KOL дорівнює $60°$, а периметр чотирикутника $KLMN$ — $18+6\sqrt{3}$.

1. Доведіть, що діагоналі чотирикутника $ABCD$ перпендикулярні.

2. Знайдіть площу чотирикутника $ABCD$.

Варіант 2

Базовий рівень

Завдання 1–6 мають по п'ять варіантів відповіді, серед яких лише ОДИН ПРАВИЛЬНИЙ. Виберіть правильну, на вашу думку, відповідь і позначте її у бланку відповідей.

1. Укажіть НЕПРАВИЛЬНЕ твердження.

А	У будь-якому квадраті всі кути рівні
Б	Діагоналі будь-якого паралелограма перетинаються і точкою перетину діляться навпіл
В	Сума протилежних кутів будь-якої трапеції дорівнює $180°$
Г	Діагоналі будь-якого ромба перпендикулярні
Д	Якщо в будь-якому чотирикутнику всі сторони рівні, то він є ромбом

2. У рівнобічній трапеції $ABCD$ $(AB=CD)$ $\angle B+\angle C=2\beta$. Укажіть формулу, за якою можна обчислити кут A цієї трапеції.

А	Б	В	Г	Д
$\angle A=360°-\beta$	$\angle A=180°-\beta$	$\angle A=360°-2\beta$	$\angle A=90°-\beta$	$\angle A=180°-2\beta$

3. Діагоналі AC і BD ромба $ABCD$ перетинаються в точці O, $AB=5$ см, $BD=6$ см. Знайдіть $\cos\angle BCO$.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{5}{6}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{3}$

4. Скільки сторін має опуклий многокутник, сума внутрішніх кутів якого дорівнює $2700°$?

А	Б	В	Г	Д
12	13	15	17	18

5. У прямокутну трапецію, бічні сторони якої дорівнюють 24 см і 26 см, вписано коло. Знайдіть площу цієї трапеції.

А	Б	В	Г	Д
650 см^2	624 см^2	1200 см^2	312 см^2	600 см^2

6. У паралелограмі $ABCD$ проведено бісектрису BL, $AL=4$ см, $LD=10$ см, $\angle B=120°$. Знайдіть площу цього паралелограма.

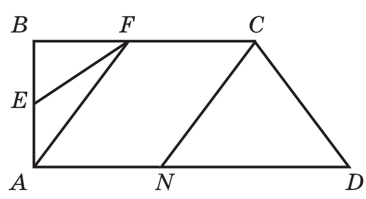
А	Б	В	Г	Д
28 см^2	$28\sqrt{3}$ см^2	$70\sqrt{3}$ см^2	70 см^2	$20\sqrt{3}$ см^2

Завдання 7 передбачає встановлення відповідності. До кожного рядка, позначеного ЦИФРОЮ, доберіть один відповідник, позначений БУКВОЮ, і поставте позначки в бланку відповідей на перетині відповідних рядків (цифри) і стовпців (букви).

7. На рисунку зображено прямокутну трапецію $ABCD$,

$$\angle A=\angle B=90°,\ AB=12,\ AD=15,\ CD=13,$$

точки E і F — середини сторін AB і BC відповідно, $CN \parallel AF$. Установіть відповідність між многокутником (1–4) та його площею (А–Д).



1	Чотирикутник $ABCN$	А	120
2	Чотирикутник $AFCD$	Б	90
3	Чотирикутник $AFCN$	В	75
4	П'ятикутник $AEFCN$	Г	65
		Д	60

Розв'яжіть завдання 8–10. Одержані відповіді запишіть у зошиті та бланку відповідей.

8. Висота DH ромба $ABCD$ ділить сторону AB на відрізки AH і HB, $AH = 8$ см, $HB = 9$ см.

1. Знайдіть висоту DH ромба $ABCD$ (у см).

2. Знайдіть площу ромба $ABCD$ (у см^2).

9. На стороні BC прямокутника $ABCD$ позначено точку E. Знайдіть периметр чотирикутника $AECD$ (у см), якщо

$$AB = 16 \text{ см}, \ BC = 26 \text{ см}, \ EC = 14 \text{ см}.$$

10. Периметр рівнобічної трапеції дорівнює 88 см, а її основи — 12 см і 26 см. Знайдіть площу цієї трапеції (у см^2).

Поглиблений рівень

Розв'яжіть завдання 11. Одержану відповідь запишіть у зошиті та бланку відповідей.

11. Навколо трапеції описане коло, діаметром якого є більша основа трапеції. Обчисліть площу цієї трапеції, якщо її бічна сторона дорівнює $10\sqrt{3}$, а висота — $8\sqrt{3}$.

Розв'язання завдання 12 повинно мати обґрунтування. Запишіть послідовні логічні дії та пояснення, зробіть посилання на математичні факти, із яких випливає те чи інше твердження. Якщо потрібно, проілюструйте розв'язання завдань рисунками, графіками, схемами, таблицями.

12. Точки K, L, M і N — середини сторін опуклого чотирикутника $ABCD$, периметр чотирикутника $KLMN$ дорівнює 28 см, $LN = 10$ см, а кут KLM прямий.

1. Доведіть, що діагоналі чотирикутника $ABCD$ перпендикулярні.

2. Знайдіть площу чотирикутника $ABCD$.

ТЕСТ 3
Коло. Круг

Варіант 1

Базовий рівень

Завдання 1–6 мають по п'ять варіантів відповіді, серед яких лише ОДИН ПРАВИЛЬНИЙ. Виберіть правильну, на вашу думку, відповідь і позначте її у бланку відповідей.

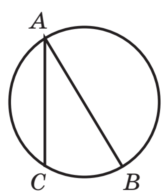
1. Знайдіть радіус кола, довжина якого дорівнює 64π см.

А	Б	В	Г	Д
32 см	64 см	8 см	16 см	4 см

2. Знайдіть діаметр круга, площа якого дорівнює 100π см^2.

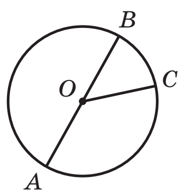
А	Б	В	Г	Д
25 см	50 см	10 см	20 см	100 см

3. На рисунку зображено коло та його діаметр AB і хорду AC, $AB:AC=5:2$. Знайдіть косинус кута BAC.



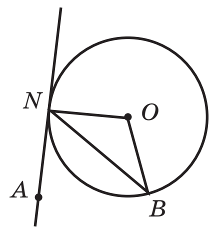
А	Б	В	Г	Д
0,6	0,4	0,25	0,2	0,5

4. На рисунку зображено коло та його діаметр AB і радіус OC. Знайдіть градусну міру кута ABC, якщо градусна міра дуги ABC дорівнює $220°$.



А	Б	В	Г	Д
$110°$	$140°$	$55°$	$40°$	$70°$

5. До кола з центром у точці O проведено дотичну AN (N — точка дотику), BN — хорда, $\angle BON = 110°$ (*див. рис.*). Знайдіть градусну міру кута ANB.



А	Б	В	Г	Д
$70°$	$20°$	$55°$	$35°$	$40°$

6. У колі проведено хорду, довжина якої дорівнює 6 см. Знайдіть радіус цього кола, якщо відстань від центра кола до цієї хорди дорівнює 4 см.

А	Б	В	Г	Д
$2\sqrt{13}$ см	7 см	$\sqrt{7}$ см	2 см	5 см

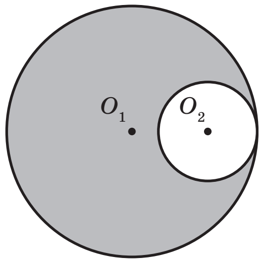
Завдання 7 передбачає встановлення відповідності. До кожного рядка, позначеного ЦИФРОЮ, доберіть один відповідник, позначений БУКВОЮ, і поставте позначки в бланку відповідей на перетині відповідних рядків (цифри) і стовпців (букви).

7. Установіть відповідність між дугою кола радіуса $R = 90$ (1–4) та її довжиною (А–Д).

1	Менша дуга A_1A_2 кола, описаного навколо квадрата $A_1A_2A_3A_4$	А	20π
2	Менша дуга B_1B_2 кола, описаного навколо правильного п'ятикутника $B_1B_2B_3B_4B_5$	Б	30π
3	Менша дуга C_2C_3 кола, описаного навколо правильного дев'ятикутника $C_1C_2C_3C_4C_5C_6C_7C_8C_9$	В	36π
4	Дуга $D_1D_2D_3$ кола, описаного навколо правильного шестикутника $D_1D_2D_3D_4D_5D_6$	Г	45π
		Д	60π

Розв'яжіть завдання 8–10. Одержані відповіді запишіть у зошиті та бланку відповідей.

8. Два кола з центрами у точках O_1 і O_2 мають внутрішній дотик (*див. рис.*). Відстань між центрами цих кіл дорівнює 12 см, а площа круга, обмеженого колом з центром у точці O_2, — 36π см^2.



1. Знайдіть радіус кола з центром у точці O_1 (у см).

2. Обчисліть $\dfrac{S}{\pi}$ (у см^2), де S — площа зафарбованої фігури.

9. Точки A, B і C ділять коло на три дуги, довжини яких відносяться як $3:4:11$. Знайдіть градусну міру НАЙБІЛЬШОГО кута трикутника ABC.

10. Пряма a є спільною зовнішньою дотичною двох кіл із центрами в точках O_1 і O_2, точка A — точка дотику прямої a з колом із центром у точці O_1, точка B — точка дотику цієї прямої з колом із центром у точці O_2, $AB=12$ см, $O_1O_2=13$ см, радіус кола з центром у точці O_2 дорівнює 2 см. Знайдіть радіус кола з центром у точці O_1 (у см).

Поглиблений рівень

Розв'яжіть завдання 11. Одержану відповідь запишіть у зошиті та бланку відповідей.

11. Із точки A до кола проведено дотичну AB (B — точка дотику) і січну, яка перетинає коло в точках K і M, причому точка K належить відрізку AM, а довжина дотичної AB на 10 см більша за довжину зовнішнього відрізка AK січної і на 25 см менша від довжини її внутрішнього відрізка KM. Обчисліть довжину дотичної AB (у см).

Розв'язання завдання 12 повинно мати обґрунтування. Запишіть послідовні логічні дії та пояснення, зробіть посилання на математичні факти, із яких випливає те чи інше твердження. Якщо *потрібно, проілюструйте розв'язання завдань рисунками, графіками, схемами, таблицями.*

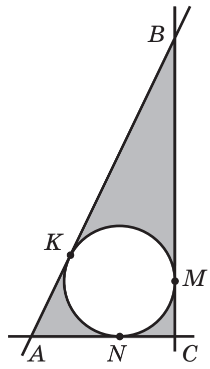
12. Точки K, M і N ділять коло на три дуги, довжини яких дорівнюють

$$\frac{\pi\sqrt{3}}{2},\ \frac{2\pi\sqrt{3}}{3} \text{ і } \frac{5\pi\sqrt{3}}{6}.$$

Через точки K, M і N проведені до кола дотичні, які перетинаються в точках A, B і C (*див. рис.*).

1. Доведіть, що трикутник ABC прямокутний.

2. Знайдіть площу зафарбованої фігури.



Варіант 2

Базовий рівень

Завдання 1–6 мають по п'ять варіантів відповіді, серед яких лише ОДИН ПРАВИЛЬНИЙ. Виберіть правильну, на вашу думку, відповідь і позначте її у бланку відповідей.

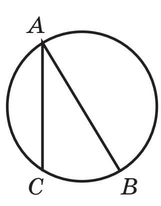
1. Знайдіть радіус кола, довжина якого дорівнює 36π см.

А	Б	В	Г	Д
6 см	12 см	36 см	18 см	3 см

2. Знайдіть діаметр круга, площа якого дорівнює 400π см^2.

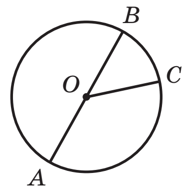
А	Б	В	Г	Д
20 см	40 см	200 см	400 см	100 см

3. На рисунку зображено коло та його діаметр AB і хорду AC, $AB = 6$ см, $\cos\angle BAC = 0{,}3$. Знайдіть довжину хорди AC.



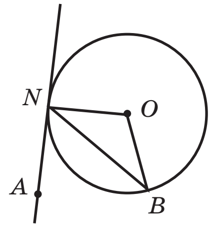
А	Б	В	Г	Д
5,7 см	6,3 см	3 см	30 см	1,8 см

4. На рисунку зображено коло та його діаметр AB і радіус OC. Знайдіть градусну міру дуги ABC, якщо $\angle ABC = 80°$.



А	Б	В	Г	Д
320°	160°	200°	250°	280°

5. До кола з центром у точці O проведено дотичну AN (N — точка дотику), BN — хорда, $\angle ANB = 65°$ (*див. рис.*). Знайдіть градусну міру кута BON.



А	Б	В	Г	Д
130°	155°	115°	100°	50°

6. У колі проведено хорду, довжина якої дорівнює 4 см. Знайдіть радіус цього кола, якщо відстань від центра кола до цієї хорди дорівнює 2 см.

А	Б	В	Г	Д
$\sqrt{5}$ см	$2\sqrt{5}$ см	$2\sqrt{2}$ см	2 см	4 см

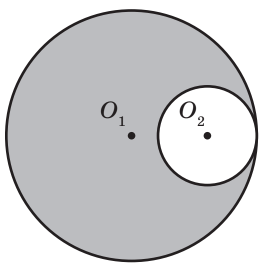
Завдання 7 передбачає встановлення відповідності. До кожного рядка, позначеного ЦИФРОЮ, доберіть один відповідник, позначений БУКВОЮ, і поставте позначки в бланку відповідей на перетині відповідних рядків (цифри) і стовпців (букви).

7. Установіть відповідність між дугою кола радіуса $R = 36$ (1–4) та її довжиною (А–Д).

1	Менша дуга A_1A_2 кола, описаного навколо правильного трикутника $A_1A_2A_3$	А	12π
2	Дуга $B_1B_2B_3$ кола, описаного навколо квадрата $B_1B_2B_3B_4$	Б	36π
3	Дуга $C_3C_4C_5$ кола, описаного навколо правильного дев'ятикутника $C_1C_2C_3C_4C_5C_6C_7C_8C_9$	В	24π
4	Дуга D_2D_3 кола, описаного навколо правильного шестикутника $D_1D_2D_3D_4D_5D_6$	Г	18π
		Д	8π

Розв'яжіть завдання 8–10. Одержані відповіді запишіть у зошиті та бланку відповідей.

8. Два кола з центрами у точках O_1 і O_2 мають внутрішній дотик (*див. рис.*). Відстань між центрами цих кіл дорівнює 16 см, а площа круга, обмеженого колом із центром у точці O_1, — 900π см^2.



1. Знайдіть радіус кола з центром у точці O_2 (у см).

2. Обчисліть $\dfrac{S}{\pi}$ (у см^2), де S — площа зафарбованої фігури.

9. Точки A, B і C ділять коло на три дуги, довжини яких відносяться як $4:5:6$. Знайдіть градусну міру НАЙМЕНШОГО кута трикутника ABC.

10. Пряма b є спільною зовнішньою дотичною двох кіл із центрами у точках O_1 і O_2, точка A — точка дотику прямої b з колом із центром у точці O_1, точка B — точка дотику цієї прямої з колом із центром у точці O_2, $AB = 24$ см, $O_1O_2 = 25$ см, радіус кола з центром у точці O_1 дорівнює 13 см. Знайдіть радіус кола з центром у точці O_2 (у см).

Поглиблений рівень

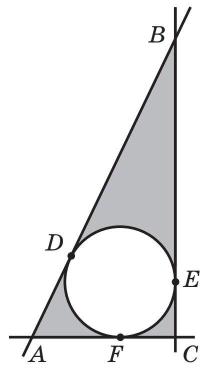
Розв'яжіть завдання 11. Одержану відповідь запишіть у зошиті та бланку відповідей.

11. З точки A до кола проведено дотичну AB (B — точка дотику) і січну, яка перетинає коло в точках K і M, причому точка K належить відрізку AM, а довжина дотичної AB на 12 см більша за довжину зовнішнього відрізка AK січної і на 30 см менша від довжини її внутрішнього відрізка KM. Обчисліть довжину дотичної AB (у см).

Розв'язання завдання 12 повинно мати обґрунтування. Запишіть послідовні логічні дії та пояснення, зробіть посилання на математичні факти, із яких випливає те чи інше твердження. Якщо потрібно, проілюструйте розв'язання завдань рисунками, графіками, схемами, таблицями.

12. Точки D, E і F ділять коло на три дуги, довжини яких дорівнюють 9π, 12π і 15π. Через точки D, E і F проведені до кола дотичні, які перетинаються в точках A, B і C (*див. рис.*).

1. Доведіть, що трикутник ABC прямокутний.
2. Знайдіть площу зафарбованої фігури.



ТЕСТ 4
Координати та вектори

Варіант 1

Базовий рівень

Завдання 1–6 мають по п'ять варіантів відповіді, серед яких лише ОДИН ПРАВИЛЬНИЙ. Виберіть правильну, на вашу думку, відповідь і позначте її у бланку відповідей.

1. Відомо, що $a>0$, $b<0$. Укажіть точку, яка лежить у ТРЕТІЙ координатній чверті.

А	Б	В	Г	Д
$A(a;b)$	$B(b;a)$	$C(-b;a)$	$D(-a;b)$	$E(-a;-b)$

2. Відомо, що $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$, причому $A(1;3)$, $B(2;-5)$. Знайдіть координати вектора $\overrightarrow{DC}$.

А	Б	В	Г	Д
$\overrightarrow{DC}(-1;-2)$	$\overrightarrow{DC}(1;2)$	$\overrightarrow{DC}(-1;-8)$	$\overrightarrow{DC}(1;-8)$	$\overrightarrow{DC}(-1;8)$

3. Точка N — середина відрізка EF. Знайдіть координати точки N, якщо $E(-3;1)$, $F(7;-9)$.

А	Б	В	Г	Д
$N(-2;4)$	$N(2;-4)$	$N(2;4)$	$N(4;-8)$	$N(-5;5)$

4. У паралелограмі $ABCD$ O — точка перетину його діагоналей,

$$\overrightarrow{AB}=\vec{a},\ \overrightarrow{BC}=\vec{b},\ \overrightarrow{AO}=\vec{c}.$$

Виразіть вектор $\vec{c}$ через вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

А	Б	В	Г	Д
$\vec{c}=\frac{1}{2}(\vec{a}-\vec{b})$	$\vec{c}=\frac{1}{2}(\vec{b}-\vec{a})$	$\vec{c}=2(\vec{a}+\vec{b})$	$\vec{c}=\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b})$	$\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$

5. У результаті паралельного перенесення точка $A(-3;1)$ перейшла в початок координат. Укажіть точку, у яку за цього паралельного перенесення перейде точка $B(1;-2)$.

А	Б	В	Г	Д
$B_1(-2;-1)$	$B_2(4;-1)$	$B_3(4;-3)$	$B_4(-2;-3)$	$B_5(-1;-0{,}5)$

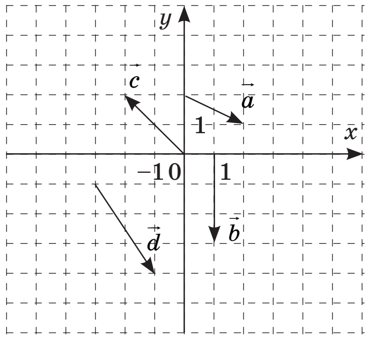
6. У прямокутному трикутнику ABC кут C прямий. Укажіть ПРАВИЛЬНУ нерівність, якщо

$$k=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC},\ m=\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{CB},\ n=\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA}.$$

А	Б	В	Г	Д
$k<m<n$	$k<n<m$	$n<k<m$	$n<m<k$	$m<n<k$

Завдання 7 передбачає встановлення відповідності. До кожного рядка, позначеного ЦИФРОЮ, доберіть один відповідник, позначений БУКВОЮ, і поставте позначки в бланку відповідей на перетині відповідних рядків (цифри) і стовпців (букви).

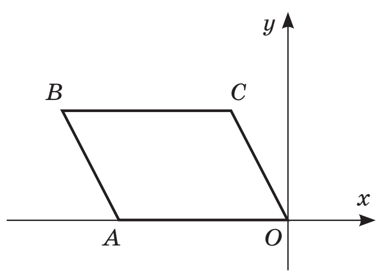
7. На рисунку зображені вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ і $\vec{d}$ у прямокутній системі координат. Установіть відповідність між вектором (1–4) і вектором, перпендикулярним до нього (А–Д).



1	$\vec{a}$	А	$\vec{k}(5;-2)$
2	$\vec{b}$	Б	$\vec{l}(3;2)$
3	$\vec{c}$	В	$\vec{m}(-1;-2)$
4	$\vec{d}$	Г	$\vec{n}(2;2)$
		Д	$\vec{p}(-2;0)$

Розв'яжіть завдання 8–10. Одержані відповіді запишіть у зошиті та бланку відповідей.

8. На рисунку зображено паралелограм $OABC$ у прямокутній системі координат, $\left|\overrightarrow{OA}\right| = 15$, $C(-5;10)$.



1. Знайдіть абсцису вершини B.

2. Знайдіть скалярний добуток векторів $\overrightarrow{CA}$ і $\overrightarrow{BO}$.

9. Відрізок BM — медіана трикутника з вершинами в точках $A(-3;4)$, $B(2;-5)$ і $C(-1;6)$. Знайдіть площу квадрата $BMNP$.

10. Сторона ромба $ABCD$ дорівнює $4\sqrt{3}$, $\angle BAD = 60°$. Знайдіть скалярний добуток векторів $\overrightarrow{CD}$ і $\overrightarrow{DB}$.

Поглиблений рівень

Розв'яжіть завдання 11. Одержану відповідь запишіть у зошиті та бланку відповідей.

11. Відомо, що $\left|\vec{y}\right| = 15$, $\left|\vec{x}+\vec{y}\right| = 3\sqrt{61}$, $\left|\vec{x}-\vec{y}\right| = 3\sqrt{21}$. Знайдіть $\left|\vec{x}\right|$.

Розв'язання завдання 12 повинно мати обґрунтування. Запишіть послідовні логічні дії та пояснення, зробіть посилання на математичні факти, із яких випливає те чи інше твердження. Якщо потрібно, проілюструйте розв'язання завдань рисунками, графіками, схемами, таблицями.

2. Коло, описане навколо трикутника ABC, задане рівнянням

$$x^2 + y^2 - 10x - 8y + 28 = 0.$$

Відомо, що $A(2;6)$, $B(8;2)$, а пряма $3x + 2y - 10 = 0$ є дотичною до цього кола, проведеною в точці C.

1. Доведіть, що трикутник ABC прямокутний.

2. Знайдіть рівняння кола, вписаного в трикутник ABC.

Варіант 2

Базовий рівень

Завдання 1–6 мають по п'ять варіантів відповіді, серед яких лише ОДИН ПРАВИЛЬНИЙ. Виберіть правильну, на вашу думку, відповідь і позначте її у бланку відповідей.

1. Відомо, що $a < 0$, $b > 0$. Укажіть точку, яка лежить у ЧЕТВЕРТІЙ координатній чверті.

А	Б	В	Г	Д
$A(a;b)$	$B(b;-a)$	$C(-a;b)$	$D(a;-b)$	$E(-a;-b)$

2. Відомо, що $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$, причому $A(-1;4)$, $B(3;-2)$. Знайдіть координати вектора $\overrightarrow{DC}$.

А	Б	В	Г	Д
$\overrightarrow{DC}(-4;6)$	$\overrightarrow{DC}(4;-6)$	$\overrightarrow{DC}(4;6)$	$\overrightarrow{DC}(4;2)$	$\overrightarrow{DC}(-2;2)$

3. Точка N — середина відрізка EF. Знайдіть координати точки N, якщо $E(2;-5)$, $F(-4;9)$.

А	Б	В	Г	Д
$N(-2;4)$	$N(-1;-2)$	$N(1;-2)$	$N(-1;2)$	$N(3;7)$

4. У паралелограмі $ABCD$ O — точка перетину його діагоналей,

$$\overrightarrow{AD}=\vec{a},\ \overrightarrow{DC}=\vec{b},\ \overrightarrow{OD}=\vec{c}.$$

Виразіть вектор $\vec{c}$ через вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

А	Б	В	Г	Д
$\vec{c}=\vec{a}-\vec{b}$	$\vec{c}=\frac{1}{2}\left(\vec{b}-\vec{a}\right)$	$\vec{c}=2\left(\vec{a}-\vec{b}\right)$	$\vec{c}=\frac{1}{2}\left(\vec{a}+\vec{b}\right)$	$\vec{c}=\frac{1}{2}\left(\vec{a}-\vec{b}\right)$

5. У результаті паралельного перенесення точка $A(-1;-6)$ перейшла в точку $B(0;1)$. Укажіть точку, у яку за цього паралельного перенесення перейде точка $C(-4;0)$.

А	Б	В	Г	Д
$C_1(-5;-7)$	$C_2(-5;-5)$	$C_3(3;-5)$	$C_4(-3;7)$	$C_5(-3;-5)$

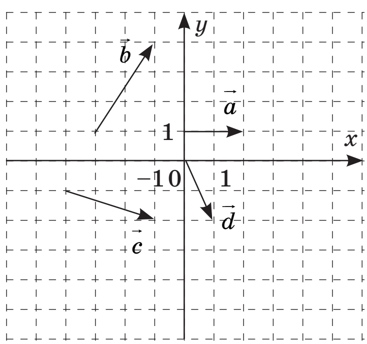
6. У правильному трикутнику ABC проведено медіану BM. Укажіть ПРАВИЛЬНУ нерівність, якщо

$$k=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BM},\ m=\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC},\ n=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BM}.$$

А	Б	В	Г	Д
$k<m<n$	$k<n<m$	$n<k<m$	$n<m<k$	$m<n<k$

Завдання 7 передбачає встановлення відповідності. До кожного рядка, позначеного ЦИФРОЮ, доберіть один відповідник, позначений БУКВОЮ, і поставте позначки в бланку відповідей на перетині відповідних рядків (цифри) і стовпців (букви).

7. На рисунку зображені вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ і $\vec{d}$ у прямокутній системі координат. Установіть відповідність між вектором (1–4) і вектором, перпендикулярними до нього (А–Д).

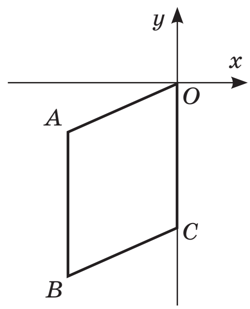


1	$\vec{a}$	А	$\vec{k}(1;3)$
2	$\vec{b}$	Б	$\vec{l}(-3;2)$
3	$\vec{c}$	В	$\vec{m}(0;-3)$
4	$\vec{d}$	Г	$\vec{n}(2;-1)$
		Д	$\vec{p}(-2;-1)$

Розв'яжіть завдання 8–10. Одержані відповіді запишіть у зошиті та бланку відповідей.

8. На рисунку зображено паралелограм $OABC$ у прямокутній системі координат,

$$\left|\overrightarrow{OC}\right| = 28,\ A(-21;-7).$$



1. Знайдіть ординату вершини B.

2. Знайдіть скалярний добуток векторів $\overrightarrow{AC}$ і $\overrightarrow{BO}$.

9. Відрізок CM — медіана трикутника з вершинами в точках $A(1;-7)$, $B(-3;9)$ і $C(4;-3)$. Знайдіть площу квадрата $CMNP$.

10. Діагональ BD ромба $ABCD$ дорівнює $6\sqrt{3}$, $\angle BAD = 60°$. Знайдіть скалярний добуток векторів $\overrightarrow{BD}$ і $\overrightarrow{DA}$.

Поглиблений рівень

Розв'яжіть завдання 11. Одержану відповідь запишіть у зошиті та бланку відповідей.

11. Відомо, що

$$\left|\vec{x}\right| = 4,\ \left|\vec{x}+\vec{y}\right| = 2\sqrt{39},\ \left|\vec{x}-\vec{y}\right| = 2\sqrt{67}.$$

Знайдіть $\left|\vec{y}\right|$.

Розв'язання завдання 12 повинно мати обґрунтування. Запишіть послідовні логічні дії та пояснення, зробіть посилання на математичні факти, із яких випливає те чи інше твердження. Якщо потрібно, проілюструйте розв'язання завдань рисунками, графіками, схемами, таблицями.

12. Коло, описане навколо трикутника ABC, задане рівнянням

$$x^2+y^2+14x-8y+55=0.$$

Відомо, що $A(-4;5)$, $B(-10;3)$, а пряма

$$3x-y+15=0$$

є дотичною до цього кола, проведеною в точці C.

1. Доведіть, що трикутник ABC прямокутний.

2. Знайдіть рівняння кола, вписаного в трикутник ABC.

РОЗДІЛ 2. СТЕРЕОМЕТРІЯ

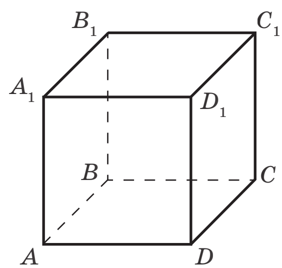
ТЕСТ 1
Прямі та площини в просторі

Варіант 1

Базовий рівень

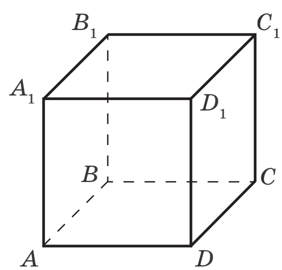
Завдання 1–6 мають по п'ять варіантів відповіді, серед яких лише ОДИН ПРАВИЛЬНИЙ. Виберіть правильну, на вашу думку, відповідь і позначте її у бланку відповідей.

1. На рисунку зображено куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Укажіть пряму перетину площин ACD і BB_1C_1.



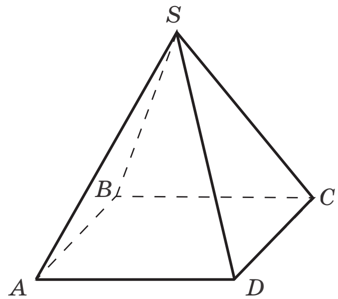
А	Б	В	Г	Д
B_1C_1	AB	CC_1	BC	CD

2. На рисунку зображено куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Укажіть серед наведених площину, паралельну прямій B_1C.



А	Б	В	Г	Д
AA_1B	ADD_1	$A_1C_1D_1$	ABD	AA_1C_1

3. На рисунку зображено чотирикутну піраміду $SABCD$. Серед наведених пар прямих укажіть пару мимобіжних прямих.



А	Б	В	Г	Д
AB і CD	SB і SD	AC і BD	AC і SA	AB і SD

4. Площини α і β перпендикулярні, а пряма a перпендикулярна до площини β. Укажіть УСІ ПРАВИЛЬНІ твердження.

I. Пряма a обов'язково належить площині α.

II. Пряма a може бути паралельною площині α.

III. Будь-яка площина, яка містить пряму a, перпендикулярна до площини α.

А	Б	В	Г	Д
I	I, II	III	II	II, III

5. Із точки A до площини α проведено похилу AB, яка утворює з цією площиною кут $60°$. Знайдіть довжину похилої AB, якщо її проекція на площину α дорівнює 3 см.

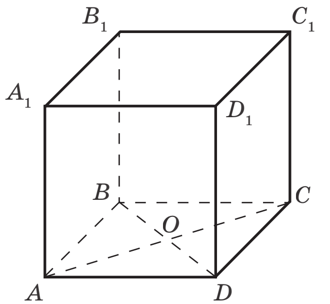
А	Б	В	Г	Д
$2\sqrt{3}$ см	$3\sqrt{2}$ см	6 см	$3\sqrt{3}$ см	1,5 см

6. Прямокутні трикутники ABC і BCD із прямими кутами ACB і BCD та спільним катетом BC лежать у перпендикулярних площинах. Знайдіть відстань між точками A і D, якщо $BC = \sqrt{3}$ см, $\angle ABC = 30°$, а трикутник BCD рівнобедрений.

А	Б	В	Г	Д
1 см	2 см	$\sqrt{6}$ см	$\sqrt{2}$ см	3 см

Завдання 7 передбачає встановлення відповідності. До кожного рядка, позначеного ЦИФРОЮ, доберіть один відповідник, позначений БУКВОЮ, і поставте позначки в бланку відповідей на перетині відповідних рядків (цифри) і стовпців (букви).

7. На рисунку зображено куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, O — точка перетину діагоналей грані $ABCD$. Установіть відповідність між градусною мірою кута (1–4) та цим кутом (А–Д).



1	30°	А	Кут між прямими AD і CC_1
2	45°	Б	Кут між прямими AD_1 і A_1B
3	60°	В	Кут між прямими B_1C і AA_1
4	90°	Г	Кут між прямими BD і B_1D_1
		Д	Кут між прямими D_1O і A_1B

Розв'яжіть завдання 8–10. Одержані відповіді запишіть у зошиті та бланку відповідей.

8. Із вершини B рівнобедреного трикутника ABC проведено перпендикуляр BK до площини цього трикутника,

$$AB = BC = 17 \text{ см}, \ AC = 16 \text{ см},$$

відстань між точками K і C дорівнює $\sqrt{689}$ см.

1. Знайдіть відстань від точки K до сторони AB (у см).

2. Знайдіть відстань від точки K до сторони AC (у см).

9. Площина β перетинає сторону AB трикутника ABC у точці M, а сторону AC — у точці N. Сторона BC паралельна площині β. Знайдіть довжину сторони AB (у см), якщо

$$BC = 21 \text{ см}, \ MN = 9 \text{ см}, \ MB = 24 \text{ см}.$$

10. Точка S віддалена від вершин трикутника ABC на відстань 10 см, $BC = 6\sqrt{2}$ см, $\angle ABC = 105°$, $\angle ACB = 30°$. Знайдіть відстань (у см) від точки S до площини цього трикутника.

Поглиблений рівень

Розв'яжіть завдання 11. Одержану відповідь запишіть у зошиті та бланку відповідей.

11. Площа рівнобічної трапеції дорівнює 180 см^2, а її основи відносяться як $1:4$. Точка P рівновіддалена від усіх сторін трапеції на відстань $6\sqrt{10}$ см. Знайдіть відстань (у см) від точки P до площини трапеції.

Розв'язання завдання 12 повинно мати обґрунтування. Запишіть послідовні логічні дії та пояснення, зробіть посилання на математичні факти, із яких випливає те чи інше твердження. Якщо потрібно, проілюструйте розв'язання завдань рисунками, графіками, схемами, таблицями.

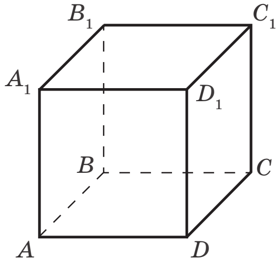
12. Точка E — середина ребра BB_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Відстань від точки E до прямої AC дорівнює $3\sqrt{3}$ см. Знайдіть відстань між прямими AC і B_1D.

Варіант 2

Базовий рівень

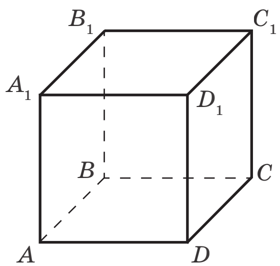
Завдання 1–6 мають по п'ять варіантів відповіді, серед яких лише ОДИН ПРАВИЛЬНИЙ. Виберіть правильну, на вашу думку, відповідь і позначте її у бланку відповідей.

1. На рисунку зображено куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Укажіть пряму перетину площин AA_1D і CC_1D_1.



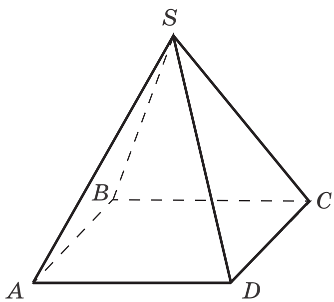
А	Б	В	Г	Д
C_1D_1	CD	DD_1	CC_1	BC

2. На рисунку зображено куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Укажіть серед наведених площину, паралельну прямій A_1B.



А	Б	В	Г	Д
ACD	B_1C_1C	$B_1C_1D_1$	ADD_1	CC_1D

3. На рисунку зображено чотирикутну піраміду $SABCD$. Серед наведених пар прямих укажіть пару мимобіжних прямих.



А	Б	В	Г	Д
AB і CD	SA і SC	AC і BD	AD і SB	AB і SA

4. Площини α і β перпендикулярні, а пряма b перпендикулярна до площини α. Укажіть УСІ ПРАВИЛЬНІ твердження.

I. Якщо пряма b належить площині β, то вона паралельна лінії перетину площин α і β.

II. Будь-яка площина, яка містить пряму b, перпендикулярна до площини α.

III. Будь-яка площина, перпендикулярна до площини β, паралельна прямій b.

А	Б	В	Г	Д
I, II і III	I, III	II	III	II, III

5. Із точки A до площини α проведено похилу AB, яка утворює з цією площиною кут $30°$. Знайдіть проекцію похилої AB на площину α, якщо довжина цієї похилої дорівнює 12 см.

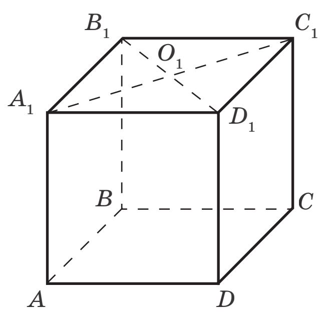
А	Б	В	Г	Д
$6\sqrt{2}$ см	$12\sqrt{3}$ см	$6\sqrt{3}$ см	$4\sqrt{3}$ см	6 см

6. Прямокутні трикутники ABC і BCD із прямими кутами ACB і BCD та спільним катетом BC лежать у перпендикулярних площинах. Знайдіть відстань між точками A і D, якщо $BC = 3$ см, $\angle CBD = 60°$, а трикутник ABC рівнобедрений.

А	Б	В	Г	Д
$3\sqrt{5}$ см	$\frac{3\sqrt{6}}{2}$ см	$2\sqrt{3}$ см	9 см	6 см

Завдання 7 передбачає встановлення відповідності. До кожного рядка, позначеного ЦИФРОЮ, доберіть один відповідник, позначений БУКВОЮ, і поставте позначки в бланку відповідей на перетині відповідних рядків (цифри) і стовпців (букви).

7. На рисунку зображено куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, O_1 — точка перетину діагоналей грані $A_1B_1C_1D_1$. Установіть відповідність між градусною мірою кута (1–4) та цим кутом (А–Д).



1	$30°$	А	Кут між прямими AD і B_1C
2	$45°$	Б	Кут між прямими AC і A_1C_1
3	$60°$	В	Кут між прямими AB_1 і BD
4	$90°$	Г	Кут між прямими AO_1 і C_1D
		Д	Кут між прямими AD_1 і B_1C

Розв'яжіть завдання 8–10. Одержані відповіді запишіть у зошиті та бланку відповідей.

8. Із вершини C рівнобедреного трикутника ABC проведено перпендикуляр CK до площини цього трикутника,

$$AC = BC = 13 \text{ см}, \ AB = 10 \text{ см},$$

відстань між точками K і B дорівнює $5\sqrt{17}$ см.

1. Знайдіть відстань від точки K до сторони AC (у см).

2. Знайдіть відстань від точки K до сторони AB (у см).

9. Площина β перетинає сторону KN трикутника KMN у точці A, а сторону MN — у точці B. Сторона KM паралельна площині β. Знайдіть довжину сторони KN (у см), якщо

$$KM = 39 \text{ см}, \ AB = 27 \text{ см}, \ AK = 24 \text{ см}.$$

10. Точка S віддалена від кожної з вершин трикутника ABC на відстань 17 см,

$$AB = 8 \text{ см}, \ \angle BAC = 105°, \ \angle ABC = 45°.$$

Знайдіть відстань (у см) від точки S до площини цього трикутника.

Поглиблений рівень

Розв'яжіть завдання 11. Одержану відповідь запишіть у зошиті та бланку відповідей.

11. Площа рівнобічної трапеції дорівнює 1020 $см^2$, а її основи відносяться як $9:25$. Точка P рівновіддалена від усіх сторін трапеції на відстань $3\sqrt{41}$ см. Знайдіть відстань (у см) від точки P до площини трапеції.

Розв'язання завдання 12 повинно мати обґрунтування. Запишіть послідовні логічні дії та пояснення, зробіть посилання на математичні факти, із яких випливає те чи інше твердження. Якщо потрібно, проілюструйте розв'язання завдань рисунками, графіками, схемами, таблицями.

12. Точка E — середина ребра AA_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Відстань від точки E до прямої B_1D_1 дорівнює $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ см. Знайдіть відстань між прямими B_1D_1 і C_1D.

ТЕСТ 2
Многогранники

Варіант 1

Базовий рівень

Завдання 1–6 мають по п'ять варіантів відповіді, серед яких лише ОДИН ПРАВИЛЬНИЙ. Виберіть правильну, на вашу думку, відповідь і позначте її у бланку відповідей.

1. Скільки ребер має шестикутна призма?

А	Б	В	Г	Д
6	7	8	12	18

2. Піраміда має 10 ребер. Визначте кількість граней цієї піраміди.

А	Б	В	Г	Д
4	5	6	7	10

3. Знайдіть довжину ребра куба, якщо площа повної поверхні цього куба дорівнює 96 см^2.

А	Б	В	Г	Д
$2\sqrt{6}$ см	$4\sqrt{2}$ см	8 см	4 см	$2\sqrt{2}$ см

4. Прямокутний паралелепіпед складено з 60 кубиків, ребро кожного з яких дорівнює 1 см. Довжини трьох ребер цього паралелепіпеда, які виходять з однієї вершини, дорівнюють 2 см, 6 см і x см. Знайдіть x.

А	Б	В	Г	Д
10	5	30	6	52

5. Апофема правильної чотирикутної піраміди дорівнює 5 см, а площа бічної поверхні цієї піраміди — 80 см^2. Знайдіть сторону основи піраміди.

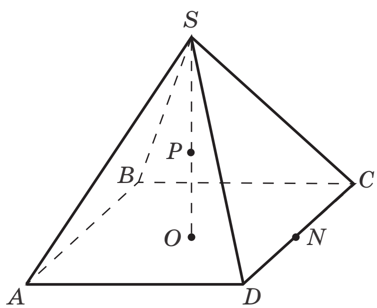
А	Б	В	Г	Д
16 см	4 см	32 см	2 см	8 см

6. В основі піраміди лежить прямокутник, сторони якого дорівнюють 1 см і 2 см. Усі бічні ребра нахилені до площини основи під кутом 30°. Знайдіть об'єм піраміди.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{\sqrt{15}}{3}$ см³	$\sqrt{15}$ см³	$\frac{\sqrt{15}}{9}$ см³	$\frac{\sqrt{15}}{6}$ см³	$\frac{\sqrt{5}}{6}$ см³

Завдання 7 передбачає встановлення відповідності. До кожного рядка, позначеного ЦИФРОЮ, доберіть один відповідник, позначений БУКВОЮ, і поставте позначки в бланку відповідей на перетині відповідних рядків (цифри) і стовпців (букви).

7. На рисунку зображено правильну чотирикутну піраміду $SABCD$, сторона основи якої дорівнює $\sqrt{2}$, а бічне ребро — $\sqrt{3}$. Точки P і N — середини висоти SO і ребра CD відповідно. Установіть відповідність між пірамідою (1–4) та її об'ємом (А–Д).



1	Піраміда $SABO$	А	$\frac{\sqrt{2}}{24}$
2	Піраміда $PABCD$	Б	$\frac{\sqrt{2}}{18}$
3	Піраміда $PDNO$	В	$\frac{\sqrt{2}}{6}$
4	Піраміда $SABND$	Г	$\frac{\sqrt{2}}{3}$
		Д	$\frac{\sqrt{2}}{2}$

Розв'яжіть завдання 8–10. Одержані відповіді запишіть у зошиті та бланку відповідей.

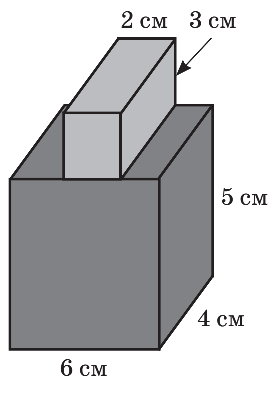
8. В основі прямої призми лежить прямокутний трикутник, катети якого дорівнюють 8 см і 15 см. Площа бічної поверхні призми дорівнює 640 см^2.

1. Знайдіть довжину бічного ребра цієї призми (у см).

2. Знайдіть об'єм цієї призми (у см^3).

9. Площа діагонального перерізу правильної чотирикутної піраміди дорівнює $36\sqrt{2}$ см^2. Знайдіть об'єм піраміди (у см^3), якщо сторона її основи дорівнює 6 см.

10. Деталь складається з двох прямокутних паралелепіпедів (*див. рис.*). Знайдіть площу повної поверхні цієї деталі (у см^2).



Поглиблений рівень

Розв'яжіть завдання 11. Одержану відповідь запишіть у зошиті та бланку відповідей.

11. Основою піраміди є ромб, діагоналі якого дорівнюють 6 см і 8 см. Усі двогранні кути при основі піраміди дорівнюють 60°. Знайдіть площу повної поверхні цієї піраміди (у см^2).

Розв'язання завдання 12 повинно мати обґрунтування. Запишіть послідовні логічні дії та пояснення, зробіть посилання на математичні факти, із яких випливає те чи інше твердження. Якщо потрібно, проілюструйте розв'язання завдань рисунками, графіками, схемами, таблицями.

12. У правильній трикутній піраміді перпендикуляр, проведений з основи її висоти до бічного ребра, дорівнює d. Знайдіть площу бічної поверхні піраміди, якщо двогранний кут між її бічними гранями дорівнює α.

Варіант 2

Базовий рівень

Завдання 1–6 мають по п’ять варіантів відповіді, серед яких лише ОДИН ПРАВИЛЬНИЙ. Виберіть правильну, на вашу думку, відповідь і позначте її у бланку відповідей.

1. Скільки ребер має восьмикутна призма?

А	Б	В	Г	Д
24	16	10	9	8

2. Піраміда має 12 ребер. Визначте кількість граней цієї піраміди.

А	Б	В	Г	Д
4	5	6	7	12

3. Знайдіть довжину ребра куба, якщо площа повної поверхні цього куба дорівнює 216 см^2.

А	Б	В	Г	Д
$3\sqrt{6}$ см	$3\sqrt{3}$ см	$3\sqrt{2}$ см	9 см	6 см

4. Прямокутний паралелепіпед складено з 96 кубиків, ребро кожного з яких дорівнює 1 см. Довжини трьох ребер цього паралелепіпеда, які виходять з однієї вершини, дорівнюють 3 см, 8 см і x см. Знайдіть x.

А	Б	В	Г	Д
85	32	4	12	2

5. Сторона основи правильної трикутної піраміди дорівнює 6 см, а площа бічної поверхні цієї піраміди — 90 см^2. Знайдіть апофему піраміди.

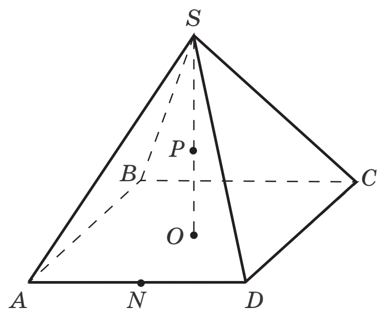
А	Б	В	Г	Д
15 см	5 см	30 см	10 см	4 см

6. В основі піраміди лежить прямокутник, сторони якого дорівнюють 1 см і 3 см. Усі бічні ребра нахилені до площини основи під кутом $60°$. Знайдіть об’єм піраміди.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{3\sqrt{30}}{2}$ см^3	$\frac{\sqrt{30}}{2}$ см^3	$\frac{3\sqrt{30}}{4}$ см^3	$\frac{\sqrt{30}}{6}$ см^3	$\frac{2\sqrt{30}}{3}$ см^3

Завдання 7 передбачає встановлення відповідності. До кожного рядка, позначеного ЦИФРОЮ, доберіть один відповідник, позначений БУКВОЮ, і поставте позначки в бланку відповідей на перетині відповідних рядків (цифри) і стовпців (букви).

7. На рисунку зображено правильну чотирикутну піраміду $SABCD$, сторона основи якої дорівнює 1, а бічне ребро — $\sqrt{2}$. Точки P і N — середини висоти SO і ребра AD відповідно. Установіть відповідність між пірамідою (1–4) та її об'ємом (А–Д).



1	Піраміда $SBCO$	А	$\frac{\sqrt{6}}{4}$
2	Піраміда $PABCD$	Б	$\frac{\sqrt{6}}{8}$
3	Піраміда $PANO$	В	$\frac{\sqrt{6}}{12}$
4	Піраміда $SABCN$	Г	$\frac{\sqrt{6}}{24}$
		Д	$\frac{\sqrt{6}}{96}$

Розв'яжіть завдання 8–10. Одержані відповіді запишіть у зошиті та бланку відповідей.

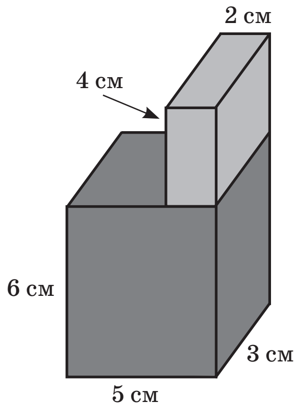
8. В основі прямої призми лежить прямокутний трикутник, один із катетів якого дорівнює 24 см, а гіпотенуза — 25 см. Площа бічної поверхні призми дорівнює 784 см^2.

1. Знайдіть довжину бічного ребра цієї призми (у см).

2. Знайдіть об’єм цієї призми (у см^3).

9. Площа діагонального перерізу правильної чотирикутної піраміди дорівнює $42\sqrt{2}$ см^2. Знайдіть об’єм піраміди (у см^3), якщо сторона її основи дорівнює 7 см.

10. Деталь складається з двох прямокутних паралелепіпедів (*див. рис.*). Знайдіть площу повної поверхні цієї деталі (у см^2).



Поглиблений рівень

Розв’яжіть завдання 11. Одержану відповідь запишіть у зошиті та бланку відповідей.

11. Основою піраміди є ромб, одна з діагоналей якого дорівнює $4\sqrt{3}$ см, а сторона — $\dfrac{5\sqrt{3}}{2}$ см. Усі двогранні кути при основі піраміди дорівнюють 60°. Знайдіть площу повної поверхні цієї піраміди (у см^2).

Розв’язання завдання 12 повинно мати обґрунтування. Запишіть послідовні логічні дії та пояснення, зробіть посилання на математичні факти, із яких випливає те чи інше твердження. Якщо потрібно, проілюструйте розв’язання завдань рисунками, графіками, схемами, таблицями.

12. У правильній трикутній піраміді перпендикуляр, проведений з основи її висоти до бічного ребра, дорівнює d. Знайдіть площу бічної поверхні піраміди, якщо її бічна грань нахилена до площини основи під кутом α.

ТЕСТ 3
Тіла обертання. Комбінації тіл

Варіант 1

Базовий рівень

Завдання 1–6 мають по п'ять варіантів відповіді, серед яких лише ОДИН ПРАВИЛЬНИЙ. Виберіть правильну, на вашу думку, відповідь і позначте її у бланку відповідей.

1. Відомо, що AB і CD — твірні циліндра, точки O і O_1 є центрами його основ, точки A і D лежать на колі з центром у точці O. Укажіть ПРАВИЛЬНЕ твердження.

А	Б	В	Г	Д
$AB \perp OO_1$	$OO_1 < CD$	$\angle AOO_1 < 90°$	$AB \parallel CD$	$OD > O_1B$

2. Осьовим перерізом конуса є правильний трикутник, периметр якого дорівнює 30 см. Знайдіть радіус основи конуса.

А	Б	В	Г	Д
5 см	10 см	15 см	20 см	6 см

3. Діаметр круга дорівнює d. Знайдіть об'єм тіла, утвореного внаслідок обертання цього круга навколо свого діаметра.

А	Б	В	Г	Д
πd^2	$\frac{\pi d^2}{4}$	$\frac{\pi d^3}{24}$	$\frac{4\pi d^3}{3}$	$\frac{\pi d^3}{6}$

4. Площа основи циліндра дорівнює 36π см^2, а його твірна — 4 см. Знайдіть площу бічної поверхні цього циліндра.

А	Б	В	Г	Д
144π см^2	108π см^2	48π см^2	24π см^2	72π см^2

5. Радіус основи конуса дорівнює r. Знайдіть об'єм конуса, якщо його твірна утворює з площиною основи кут β.

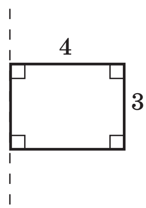
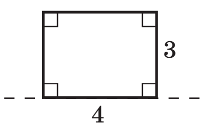
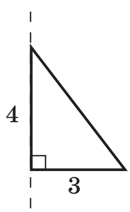
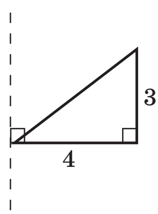
А	Б	В	Г	Д
$\frac{1}{3}\pi r^3 \sin\beta$	$\pi r^3 \operatorname{ctg}\beta$	$\pi r^3 \operatorname{tg}\beta$	$\frac{1}{3}\pi r^3 \operatorname{tg}\beta$	$\frac{1}{3}\pi r^3 \operatorname{ctg}\beta$

6. 27 однакових свинцевих кульок переплавили в одну кулю, радіус якої дорівнює 9 см. Знайдіть радіус цих кульок. Втратами металу під час переплавлення знехтуйте.

А	Б	В	Г	Д
2 см	3 см	1,5 см	4 см	6 см

Завдання 7 передбачає встановлення відповідності. До кожного рядка, позначеного ЦИФРОЮ, доберіть один відповідник, позначений БУКВОЮ, і поставте позначки в бланку відповідей на перетині відповідних рядків (цифри) і стовпців (букви).

7. Установіть відповідність між плоскою фігурою (1–4) та об'ємом тіла (А–Д), утвореного внаслідок обертання цієї фігури навколо прямої, зображеної пунктиром.

1	 Прямокутник		А	12π
2	 Прямокутник		Б	16π
3	 Прямокутний трикутник		В	32π
4	 Прямокутний трикутник		Г	36π
			Д	48π

Розв'яжіть завдання 8–10. Одержані відповіді запишіть у зошиті та бланку відповідей.

8. Радіус основи конуса дорівнює 30 см, а центр основи віддалений від твірної на 24 см.

1. Знайдіть довжину твірної конуса (у см).

2. Обчисліть $\dfrac{S}{\pi}$ (у см^2), де S — площа бічної поверхні конуса.

9. У циліндрі паралельно його осі на відстані $4\sqrt[6]{\dfrac{27}{\pi^2}}$ см від неї проведено переріз, діагональ якого нахилена до площини основи циліндра під кутом $30°$. Знайдіть об'єм циліндра (у см^3), якщо радіус його основи дорівнює $5\sqrt[6]{\dfrac{27}{\pi^2}}$ см.

10. Основа прямої призми — прямокутний трикутник, катети якого дорівнюють 2 і 4. Довжина бічного ребра призми дорівнює $8\sqrt{5}$. Знайдіть площу бічної поверхні S циліндра, описаного навколо цієї призми. У відповіді запишіть значення $\dfrac{S}{\pi}$.

Поглиблений рівень

Розв'яжіть завдання 11. Одержану відповідь запишіть у зошиті та бланку відповідей.

11. У конус, площа осьового перерізу якого дорівнює $\dfrac{432}{\pi}$ см^2, а висота — $\dfrac{18\sqrt{\pi}}{\pi}$ см, вписана сфера. Обчисліть площу цієї сфери (у см^2).

Розв'язання завдання 12 повинно мати обґрунтування. Запишіть послідовні логічні дії та пояснення, зробіть посилання на математичні факти, із яких випливає те чи інше твердження. Якщо потрібно, проілюструйте розв'язання завдань рисунками, графіками, схемами, таблицями.

12. Площа бічної поверхні правильної чотирикутної піраміди дорівнює S, а бічне ребро утворює з висотою цієї піраміди кут α. Знайдіть радіус кулі, описаної навколо цієї піраміди.

Варіант 2

Базовий рівень

Завдання 1–6 мають по п'ять варіантів відповіді, серед яких лише ОДИН ПРАВИЛЬНИЙ. Виберіть правильну, на вашу думку, відповідь і позначте її у бланку відповідей.

1. Відомо, що AB і CD — твірні циліндра, точки O і O_1 є центрами його основ, точки A і D лежать на колі з центром у точці O. Укажіть ПРАВИЛЬНЕ твердження.

А	Б	В	Г	Д
$CD \perp OO_1$	$AD \parallel OO_1$	$\angle CO_1O < 90°$	$O_1C > OA$	$AB = OO_1$

2. Осьовим перерізом конуса є правильний трикутник, периметр якого дорівнює 24 см. Знайдіть радіус основи конуса.

А	Б	В	Г	Д
16 см	8 см	4 см	12 см	6 см

3. Об'єм тіла, утвореного внаслідок обертання круга навколо свого діаметра, дорівнює V. Знайдіть радіус цього круга.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{V}{\pi}}$	$\sqrt{\frac{V}{2\pi}}$	$\sqrt[3]{\frac{3V}{\pi}}$	$\sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}$	$\sqrt[3]{\frac{4V}{3\pi}}$

4. Площа основи циліндра дорівнює 64π см², а його твірна — 5 см. Знайдіть площу бічної поверхні цього циліндра.

А	Б	В	Г	Д
320π см²	160π см²	40π см²	640π см²	80π см²

5. Висота конуса дорівнює h. Знайдіть об'єм конуса, якщо його твірна утворює з площиною основи кут α.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{1}{3}\pi h^3 \cos^2\alpha$	$\pi h^3 \operatorname{ctg}^2\alpha$	$\frac{1}{3}\pi h^3 \operatorname{ctg}^2\alpha$	$\frac{1}{3}\pi h^3 \operatorname{tg}^2\alpha$	$\pi h^3 \operatorname{tg}^2\alpha$

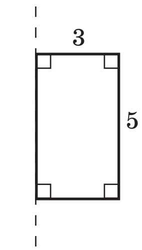
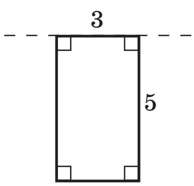
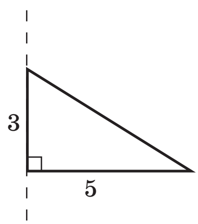
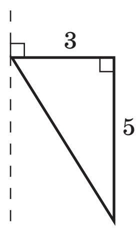
6. 8 однакових свинцевих кульок переплавили в одну кулю, радіус якої дорівнює 8 см. Знайдіть радіус цих кульок. Втратами металу під час переплавлення знехтуйте.

А	Б	В	Г	Д
4 см	1 см	2 см	3 см	6 см

Завдання 7 передбачає встановлення відповідності. До кожного рядка, позначеного ЦИФРОЮ, доберіть один відповідник, позна-

чений БУКВОЮ, і поставте позначки в бланку відповідей на перетині відповідних рядків (цифри) і стовпців (букви).

7. Установіть відповідність між плоскою фігурою (1–4) та об'ємом тіла (А–Д), утвореного внаслідок обертання цієї фігури навколо прямої, зображеної пунктиром.

1	 Прямокутник		А	15π
2	 Прямокутник		Б	25π
3	 Прямокутний трикутник		В	30π
4	 Прямокутний трикутник		Г	45π
			Д	75π

Розв'яжіть завдання 8–10. Одержані відповіді запишіть у зошиті та бланку відповідей.

8. Радіус основи конуса дорівнює 15 см, а центр основи віддалений від твірної на 9 см.

1. Знайдіть довжину твірної конуса (у см).

2. Обчисліть $\frac{S}{\pi}$ (у см^2), де S — площа бічної поверхні конуса.

9. У циліндрі паралельно його осі на відстані $\frac{\sqrt{21}}{\sqrt[3]{\pi}}$ см від неї проведено переріз, діагональ якого нахилена до площини основи циліндра під кутом $60°$. Знайдіть об'єм циліндра (у см^3), якщо його твірна дорівнює $\frac{18\sqrt[3]{\pi^2}}{\pi}$ см.

10. Основа прямої призми — прямокутний трикутник, катети якого дорівнюють 3 і 6. Довжина бічного ребра призми дорівнює $9\sqrt{5}$. Знайдіть площу бічної поверхні S циліндра, описаного навколо цієї призми. У відповіді запишіть значення $\frac{S}{\pi}$.

Поглиблений рівень

Розв'яжіть завдання 11. Одержану відповідь запишіть у зошиті та бланку відповідей.

11. У конус, площа осьового перерізу якого дорівнює $\frac{108}{\pi}$ см^2, а радіус основи — $\frac{12\sqrt{\pi}}{\pi}$ см, вписана сфера. Обчисліть площу цієї сфери (у см^2).

Розв'язання завдання 12 повинно мати обґрунтування. Запишіть послідовні логічні дії та пояснення, зробіть посилання на математичні факти, із яких випливає те чи інше твердження. Якщо потрібно, проілюструйте розв'язання завдань рисунками, графіками, схемами, таблицями.

12. Площа бічної поверхні правильної чотирикутної піраміди дорівнює S, а плоский кут при вершині піраміди — γ. Знайдіть радіус кулі, описаної навколо цієї піраміди.

ТЕСТ 4
Координати та вектори

Варіант 1

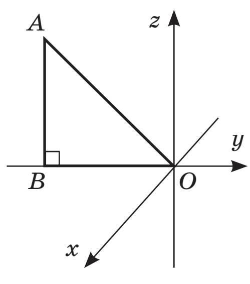
Базовий рівень

Завдання 1–6 мають по п'ять варіантів відповіді, серед яких лише ОДИН ПРАВИЛЬНИЙ. Виберіть правильну, на вашу думку, відповідь і позначте її у бланку відповідей.

1. Відомо, що $a=0$, $b>0$, $c=0$. Укажіть точку, яка належить осі Oz прямокутної системи координат у просторі.

А	Б	В	Г	Д
$A(a;b;c)$	$B(c;-b;a)$	$C(b;a;c)$	$D(a;c;b)$	$E(-b;c;a)$

2. Прямокутний рівнобедрений трикутник ABO $(\angle ABO=90°)$ лежить у площині yOz прямокутної декартової системи координат у просторі (*див. рис.*), і його вершина O збігається з початком координат. Визначте координати вектора $\overrightarrow{OA}$, якщо довжина катета цього трикутника дорівнює 4.



А	Б	В	Г	Д
$(4;0;4)$	$(0;-4;4)$	$(4;-4;0)$	$(0;4;4)$	$(4;0;0)$

3. Точка N — середина відрізка CD. Знайдіть координати точки D, якщо $C(-3;0;-2)$, $N(1;4;0)$.

А	Б	В	Г	Д
$D(-1;8;-2)$	$D(1;8;2)$	$D(-7;-4;-4)$	$D(7;4;-4)$	$D(5;8;2)$

4. У результаті паралельного перенесення початок координат перейшов у точку $M(3;1;-2)$. Укажіть точку, у яку за цього паралельного перенесення перейде точка $K(-1;3;1)$.

А	Б	В	Г	Д
$K_1(-4;2;3)$	$K_2(4;2;3)$	$K_3(2;4;-1)$	$K_4(-2;4;1)$	$K_5(-3;3;-2)$

5. При якому значенні n вектори $\vec{a}(1;n;-2)$ і $\vec{b}(n;3;4)$ перпендикулярні?

А	Б	В	Г	Д
$\sqrt{3}$	-4	4	-2	2

6. Дано паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Укажіть вектор, який дорівнює вектору $\vec{p}$, де $\vec{p} = \overrightarrow{DD_1} - \overrightarrow{D_1C_1} + \overrightarrow{A_1D_1}$.

А	Б	В	Г	Д
$\overrightarrow{A_1C}$	$\overrightarrow{CD_1}$	$\overrightarrow{BD_1}$	$\overrightarrow{B_1D}$	$\overrightarrow{AC_1}$

Завдання 7 передбачає встановлення відповідності. До кожного рядка, позначеного ЦИФРОЮ, доберіть один відповідник, позначений БУКВОЮ, і поставте позначки в бланку відповідей на перетині відповідних рядків (цифри) і стовпців (букви).

7. Відомо, що точка E симетрична точці $F(2;-9;1)$ відносно початку координат. Установіть відповідність між точкою (1–4) та її координатами (А–Д).

1	Точка, симетрична точці E відносно осі Ox	А	$(-2;9;1)$
2	Точка, симетрична точці E відносно осі Oz	Б	$(2;9;-1)$
3	Точка, симетрична точці E відносно площини xOy	В	$(-2;-9;1)$
4	Точка, симетрична точці E відносно площини yOz	Г	$(-2;-9;-1)$
		Д	$(2;-9;-1)$

Розв'яжіть завдання 8–10. Одержані відповіді запишіть у зошиті та бланку відповідей.

8. Дано вектори $\vec{a}(1;-3;2)$ і $\vec{b}(2;2;-11)$.

1. Обчисліть $\left|2\vec{a}-\vec{b}\right|$.

2. Обчисліть значення виразу $\vec{a}\left(2\vec{a}-\vec{b}\right)$.

9. Дано точки $P(0;3;4)$, $Q(a;-1;c)$, $R(-1;b;4)$ і $S(6;-3;1)$. Знайдіть СУМУ значень параметрів a, b і c, при яких вектори $\overrightarrow{PQ}$ і $\overrightarrow{RS}$ рівні.

10. Знайдіть квадрат довжини діагоналі AC паралелограма $ABCD$, якщо $A(-1;-5;11)$, $B(1;1;9)$, $D(5;-3;-5)$.

Поглиблений рівень

Розв'яжіть завдання 11. Одержану відповідь запишіть у зошиті та бланку відповідей.

11. Обчисліть площу паралелограма $ABCD$, якщо

$$\overrightarrow{AB}\left(2\sqrt[4]{6};-4\sqrt[4]{6};0\right),\ \overrightarrow{AC}\left(4\sqrt[4]{6};-4\sqrt[4]{6};4\sqrt[4]{6}\right).$$

Розв'язання завдання 12 повинно мати обґрунтування. Запишіть послідовні логічні дії та пояснення, зробіть посилання на математичні факти, із яких випливає те чи інше твердження. Якщо потрібно, проілюструйте розв'язання завдань рисунками, графіками, схемами, таблицями.

12. Точки $A(4;0;2)$, $B(4;3;-2)$ і $C(4;0;-2)$ — вершини трикутника, AL і BN — бісектриси цього трикутника. Знайдіть кут між векторами $\overrightarrow{AL}$ і $\overrightarrow{BN}$.

Варіант 2

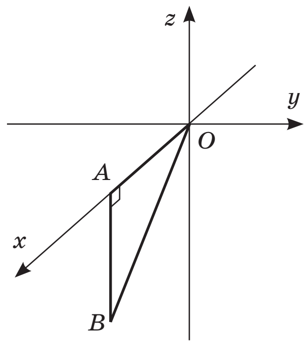
Базовий рівень

Завдання 1–6 мають по п'ять варіантів відповіді, серед яких лише ОДИН ПРАВИЛЬНИЙ. Виберіть правильну, на вашу думку, відповідь і позначте її у бланку відповідей.

1. Відомо, що $a=0$, $b=0$, $c<0$. Укажіть точку, яка належить осі Oy прямокутної системи координат у просторі.

А	Б	В	Г	Д
$A(a;b;c)$	$B(c;a;b)$	$C(b;a;c)$	$D(-c;b;a)$	$E(a;-c;b)$

2. Прямокутний рівнобедрений трикутник ABO $(\angle BAO = 90°)$ лежить у площині xOz прямокутної декартової системи координат у просторі (*див. рис.*), і його вершина O збігається з початком координат. Визначте координати вектора $\overrightarrow{OB}$, якщо довжина катета цього трикутника дорівнює 6.



А	Б	В	Г	Д
$(6;0;0)$	$(6;-6;0)$	$(6;0;-6)$	$(6;0;6)$	$(0;6;-6)$

3. Точка N — середина відрізка CD. Знайдіть координати точки C, якщо $D(0;-1;2)$, $N(4;-3;0)$.

А	Б	В	Г	Д
$C(2;-2;1)$	$C(2;2;1)$	$C(8;-5;-2)$	$C(8;-7;-2)$	$C(-4;1;4)$

4. У результаті паралельного перенесення точка $K(2;-1;4)$ перейшла в точку $M(-3;2;-6)$. Укажіть точку, у яку за цього паралельного перенесення перейде початок координат.

А	Б	В	Г	Д
$O_1(-6;-2;-24)$	$O_2(-5;3;-10)$	$O_3(-1;1;-2)$	$O_4(5;1;10)$	$O_5(5;-3;10)$

5. При якому значенні n вектори $\vec{a}(-n;3;-1)$ і $\vec{b}(3;-8;n)$ перпендикулярні?

А	Б	В	Г	Д
-12	12	$\sqrt{3}$	6	-6

6. Дано паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Укажіть вектор, який дорівнює вектору $\vec{p}$, де $\vec{p} = \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BB_1}$.

А	Б	В	Г	Д
$\overrightarrow{BD}$	$\overrightarrow{B_1D}$	$\overrightarrow{A_1C}$	$\overrightarrow{BD_1}$	$\overrightarrow{AC_1}$

Завдання 7 передбачає встановлення відповідності. До кожного рядка, позначеного ЦИФРОЮ, доберіть один відповідник, позначений БУКВОЮ, і поставте позначки в бланку відповідей на перетині відповідних рядків (цифри) і стовпців (букви).

7. Відомо, що точка E симетрична точці $F(-3;2;8)$ відносно початку координат. Установіть відповідність між точкою (1–4) та її координатами (А–Д).

1	Точка, симетрична точці E відносно осі Oy	А	$(3;-2;8)$
2	Точка, симетрична точці E відносно осі Oz	Б	$(-3;2;-8)$
3	Точка, симетрична точці E відносно площини xOy	В	$(-3;-2;-8)$
4	Точка, симетрична точці E відносно площини xOz	Г	$(3;2;-8)$
		Д	$(-3;-2;8)$

Розв'яжіть завдання 8–10. Одержані відповіді запишіть у зошиті та бланку відповідей.

8. Дано вектори $\vec{a}(3;-1;3)$ і $\vec{b}(1;2;-7)$.

1. Обчисліть $\left|\vec{a} - 3\vec{b}\right|$.

2. Обчисліть значення виразу $\vec{b}\left(\vec{a} - 3\vec{b}\right)$.

9. Дано точки $K(a;6;-3)$, $L(5;-4;7)$, $M(-3;-1;c)$ і $N(4;b;-6)$. Знайдіть СУМУ значень параметрів a, b і c, при яких вектори $\overrightarrow{KL}$ і $\overrightarrow{MN}$ рівні.

10. Знайдіть квадрат довжини діагоналі AC паралелограма $ABCD$, якщо $B(4;4;0)$, $C(-1;3;8)$, $D(2;6;7)$.

Поглиблений рівень

Розв'яжіть завдання 11. Одержану відповідь запишіть у зошиті та бланку відповідей.

11. Обчисліть площу паралелограма $ABCD$, якщо

$$\overrightarrow{BC}\left(-\sqrt[4]{6};2\sqrt[4]{6};0\right),\ \overrightarrow{BD}\left(0;2\sqrt[4]{6};-2\sqrt[4]{6}\right).$$

Розв'язання завдання 12 повинно мати обґрунтування. Запишіть послідовні логічні дії та пояснення, зробіть посилання на математичні факти, із яких випливає те чи інше твердження. Якщо потрібно, проілюструйте розв'язання завдань рисунками, графіками, схемами, таблицями.

12. Точки $A(4;-4;0)$, $B(4;2;-8)$ і $C(4;-4;-8)$ — вершини трикутника, BL і CN — бісектриси цього трикутника. Знайдіть кут між векторами $\overrightarrow{BL}$ і $\overrightarrow{CN}$.

ПІДСУМКОВІ ТЕСТИ

ТЕСТ 1

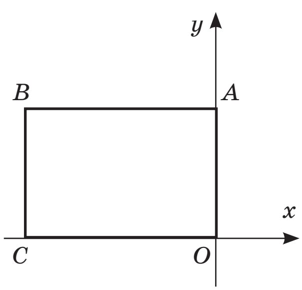
Базовий рівень

Завдання 1–20 мають по п’ять варіантів відповіді, серед яких лише ОДИН ПРАВИЛЬНИЙ. Виберіть правильну, на вашу думку, відповідь і позначте її у бланку відповідей.

1. Обчисліть: $10:\frac{2}{5}$.

А	Б	В	Г	Д
4	10	25	1	5

2. На рисунку зображено прямокутник $OABC$ у прямокутній системі координат, його вершина O збігається з початком координат. Визначте координати точки B, якщо $OA = 4$, $OC = 6$.



А	Б	В	Г	Д
$B(6;4)$	$B(4;6)$	$B(4;-6)$	$B(-6;4)$	$B(-6;-4)$

3. Розв’яжіть рівняння $9(x+2)=9$.

А	Б	В	Г	Д
–2	–1	3	1	2

4. Укажіть функцію, графік якої проходить через точку $(0;1)$.

А	Б	В	Г	Д
$y=x-1$	$y=x^2$	$y=\log_2 x$	$y=\sin x$	$y=\cos x$

5. Маса сушеної картоплі становить 14 % маси свіжої. Скільки треба взяти свіжої картоплі, щоб отримати 70 кг сушеної?

А	Б	В	Г	Д
500 кг	9,8 кг	98 кг	570 кг	50 кг

6. У прямокутному трикутнику ABC кут ACB прямий. Укажіть УСІ ПРАВИЛЬНІ твердження.

I. $\angle A+\angle B=90^\circ$.

II. $AC^2-AB^2=BC^2$.

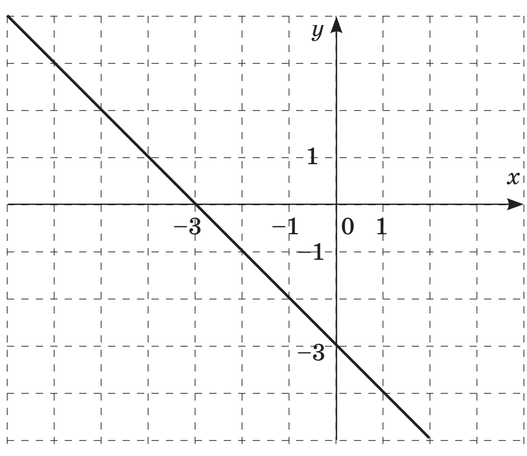
III. $BC<AB$.

А	Б	В	Г	Д
I	II	II, III	I, III	I, II і III

7. Розв'яжіть нерівність $\dfrac{2}{x+1}>\dfrac{3}{x+1}$.

А	Б	В	Г	Д
Розв'язків немає	$(1;+\infty)$	$(-\infty;1)$	$(-1;+\infty)$	$(-\infty;-1)$

8. Укажіть функцію, графік якої зображено на рисунку.



А	Б	В	Г	Д
$y=-3x$	$y=x+3$	$y=x-3$	$y=-3-x$	$y=3-x$

9. Периметр основи правильної чотирикутної призми дорівнює 20 см, а бічне ребро — 6 см. Знайдіть об’єм призми.

А	Б	В	Г	Д
120 см^3	150 см^3	60 см^3	50 см^3	40 см^3

10. Спростіть вираз $\frac{\sqrt{x^2y^2}}{xy^2}$, якщо $x<0,\ y>0$.

А	Б	В	Г	Д
y	$-y$	$-\frac{1}{y}$	$\frac{1}{y}$	x

11. Укажіть нерівність, яка НЕ має розв’язків.

А	Б	В	Г	Д
$6^x>0{,}6$	$6^x<\sqrt{6}$	$1-6^x>0$	$6^x+4>0$	$6^x+6<0$

12. У коробці лежать олівці, із них $\frac{1}{9}$ усіх олівців — сині, $\frac{5}{9}$ усіх олівців — червоні, а решта — зелені. Знайдіть ймовірність того, що перший навмання взятий із коробки олівець буде зеленим.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{5}$

13. Точка C — середина відрізка AB, який не перетинає площину α. Відстань від точки A до площини α дорівнює 8 см, а відстань від точки C до цієї площини — 18 см. Знайдіть відстань від точки B до площини α.

А	Б	В	Г	Д
10 см	13 см	26 см	28 см	44 см

14. Знайдіть y_0, якщо $(x_0;y_0)$ — розв’язок системи рівнянь

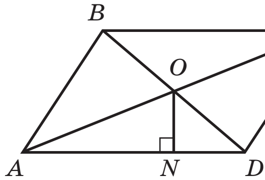
$$\begin{cases}\sqrt{x+y}=4,\\ \sqrt{x-y}=6.\end{cases}$$

А	Б	В	Г	Д
-1	-6	-10	42	26

15. Знайдіть восьмий член арифметичної прогресії 6; 3; 0; ... .

А	Б	В	Г	Д
27	30	-15	-18	-21

16. Діагоналі паралелограма $ABCD$ перетинаються в точці O, $ON \perp AD$, $AC = 10$ см, $ON = 3$ см (*див. рис.*). Знайдіть синус кута NAO.



А	Б	В	Г	Д
$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{3}{5}$

17. Спростіть вираз $x^2 - 1 - (x-3)^2$.

А	Б	В	Г	Д
$-6x-10$	$6x-10$	$-6x+8$	-10	8

18. Розв'яжіть рівняння $\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{3}} - 1 = 0$.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{\pi}{6}+2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$	$\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$	$\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$	$\frac{\pi}{3}+\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$	$\frac{\pi}{3}+2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$

19. Знайдіть область визначення функції $y = \log_3(18 + 3x - x^2)$.

А	Б	В	Г	Д
$(0;+\infty)$	$(-\infty;-3)$	$(-3;6)$	$(-\infty;-3)\cup(6;+\infty)$	$(6;+\infty)$

20. Площа повної поверхні циліндра, осьовим перерізом якого є квадрат, дорівнює 150π см². Знайдіть радіус основи циліндра.

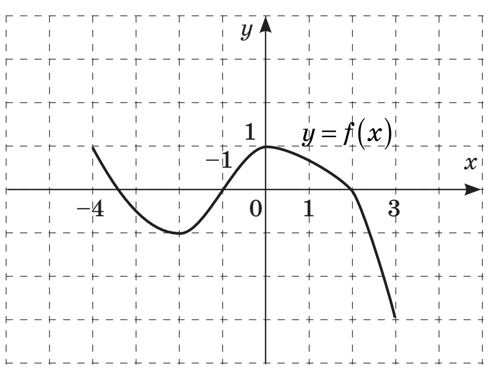
А	Б	В	Г	Д
10 см	5 см	$\sqrt{30}$ см	$5\sqrt{2}$ см	15 см

Завдання 21–24 передбачають встановлення відповідності. До кожного рядка, позначеного ЦИФРОЮ, доберіть один відповідник, позначений БУКВОЮ, і поставте позначки в бланку відповідей на перетині відповідних рядків (цифри) і стовпців (букви).

21. Установіть відповідність між виразом (1–4) та його значенням (А–Д), якщо $a=\dfrac{1}{2}$.

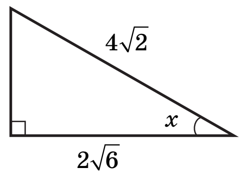
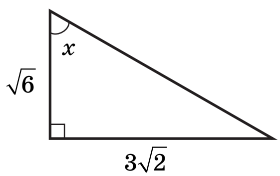
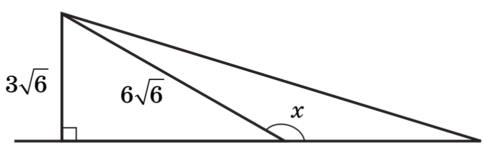
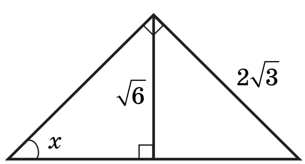
1	$\dfrac{a^4}{a^2}$	А	$\dfrac{1}{4}$
2	$a^{-3}a^2$	Б	$\dfrac{1}{2}$
3	$\left(a^{-1}\right)^2$	В	2
4	$\dfrac{a^{-2}}{a\,a^{-4}}$	Г	4
		Д	32

22. На рисунку зображено графік функції $y=f(x)$, що визначена на проміжку $[-4;3]$. Установіть відповідність між функцією (1–4) та кількістю всіх точок перетину його графіка з осями координат (А–Д).

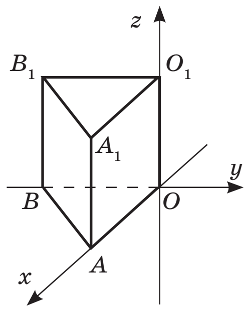


1	$y=f(x)+2$	А	Жодної
2	$y=f(x)-2$	Б	Одна
3	$y=f(x-2)$	В	Дві
4	$y=f(x+4)-3$	Г	Три
		Д	Чотири

23. Установіть відповідність між кутом трикутника, позначеного буквою x на рисунках (1–4), та його градусною мірою (А–Д).

1		А	30°
2		Б	45°
3		В	60°
4		Г	120°
		Д	150°

24. На рисунку зображено пряму трикутну призму $ABOA_1B_1O_1$ в прямокутній системі координат, вибраній так, що вершина O призми є початком координат, а ребра OA, OB і OO_1 належать осям x, y і z відповідно, $OA=OB=OO_1=3$. Установіть відповідність між вектором (1–4) та його координатами (А–Д).



1	$\overrightarrow{OB}$	А	$(0;0;3)$
2	$\overrightarrow{OO_1}$	Б	$(3;0;3)$
3	$\overrightarrow{A_1B_1}$	В	$(0;-3;0)$
4	$\overrightarrow{AO_1}$	Г	$(-3;0;3)$
		Д	$(-3;-3;0)$

Розв'яжіть завдання 25–30. Одержані відповіді запишіть у зошиті та бланку відповідей.

25. Перший робітник за 6 год виготовив стільки деталей, скільки другий за 8 год. Вважайте, що кожний робітник виготовляє однакову кількість деталей щогодини.

1. Скільки деталей виготовляв за 1 год перший робітник, якщо відомо, що він робив за 1 год на 3 деталі більше, ніж другий?

2. За скільки годин виготовлять 147 деталей два робітники, працюючи разом?

26. Одна зі сторін прямокутника дорівнює 24 см, а площа круга, описаного навколо цього прямокутника, — 169π см^2.

1. Знайдіть довжину діагоналі цього прямокутника (у см).

2. Знайдіть периметр цього прямокутника (у см).

27. Знайдіть значення виразу

$$3\sin^2\alpha + 14\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right),$$

якщо $\cos\alpha = 0{,}6$.

28. Розв'яжіть нерівність

$$\log_{\frac{1}{2}}(x+3) > \log_{\frac{1}{2}}\left(48 + 5x - x^2\right).$$

У відповідь запишіть СУМУ всіх ЦІЛИХ розв'язків цієї нерівності.

29. Обчисліть площу фігури, обмеженої графіком функції $y = 15 - 3x^2$ і прямою $y = 3$.

30. В основі конуса проведено хорду, довжина якої дорівнює 24 см, на відстані 9 см від центра основи. Знайдіть довжину твірної конуса (у см), якщо його об'єм дорівнює 600π см^3.

Поглиблений рівень

Розв'яжіть завдання 31–34. Одержані відповіді запишіть у зошиті та бланку відповідей.

31. Обчисліть: $\dfrac{28\log_5 11 \cdot \log_{11} 2 \cdot \log_2 \sqrt[4]{7} + 7}{4\log_5 35}$.

32. На столі лежать 4 різні лінійки, 6 різних олівців і 2 різні гумки. Учень хоче вибрати набір або з двох лінійок, двох олівців і однієї гумки, або з однієї лінійки, двох олівців і однієї гумки. Скількома способами він це може зробити?

33. У сферу вписана пряма призма, основа якої — прямокутний трикутник. Один із кутів прямокутного трикутника дорівнює $60°$, а площа сфери — 108π см^2. Діагональ найбільшої бічної грані призми нахилена до площини основи під кутом $30°$. Обчисліть об'єм призми (у см^3).

34. Пряма $y = 4x + 5$ дотикається до графіка функції

$$f(x) = x^3 + ax^2 + b$$

у точці $x_0 = -2$. Знайдіть значення $f(3)$.

Розв'язання завдань 35, 36 повинно мати обґрунтування. Запишіть послідовні логічні дії та пояснення, зробіть посилання на математичні факти, із яких випливає те чи інше твердження. Якщо потрібно, проілюструйте розв'язання завдань рисунками, графіками, схемами, таблицями.

35. У рівнобічну трапецію $ABCD$ ($BC \parallel AD$), периметр якої дорівнює 52 см, вписано коло. Через вершину B проведено пряму, яка ділить навпіл діагональ AC і перетинає більшу основу AD у точці K, $BC : KD = 4 : 5$.

1. Доведіть, що чотирикутник $ABCK$ — паралелограм.

2. Знайдіть площу паралелограма $ABCK$.

36. При яких значеннях параметра a рівняння

$$9^{x+\sqrt{4x^2-12|x|+9}} - (a-9)\cdot 3^{x+\sqrt{4x^2-12|x|+9}} - 9a = 0$$

має рівно чотири різні корені?

ТЕСТ 2

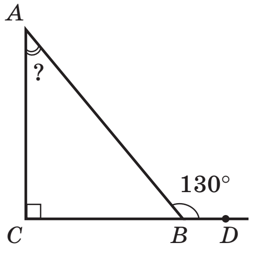
Базовий рівень

Завдання 1–20 мають по п'ять варіантів відповіді, серед яких лише ОДИН ПРАВИЛЬНИЙ. Виберіть правильну, на вашу думку, відповідь і позначте її у бланку відповідей.

1. Спростіть вираз $-6x+3-4x$.

А	Б	В	Г	Д
$-2x+3$	$-10x+3$	$-7x$	$7x$	$10x+3$

2. На рисунку зображено прямокутний трикутник ABC, $\angle ACB$ — прямий, $\angle ABD$ — зовнішній. Визначте градусну міру кута BAC, якщо $\angle ABD = 130°$.

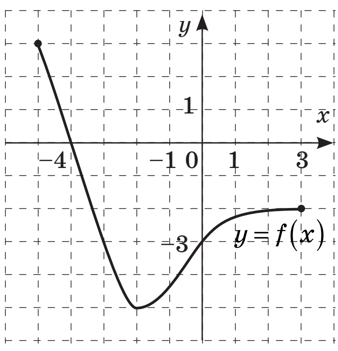


А	Б	В	Г	Д
40°	50°	65°	25°	20°

3. Розв'яжіть нерівність $3 > 9x$.

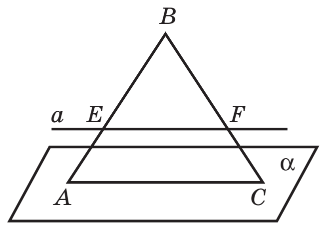
А	Б	В	Г	Д
$(3;+\infty)$	$(-\infty;3)$	$(-\infty;6)$	$\left(\frac{1}{3};+\infty\right)$	$\left(-\infty;\frac{1}{3}\right)$

4. На рисунку зображено графік функції $y=f(x)$, визначеної на проміжку $[-5;3]$. Укажіть нуль функції $y=f(x)$.



А	Б	В	Г	Д
3	−3	−2	−4	−5

5. Сторона AC правильного трикутника ABC лежить у площині α, вершина B цій площині не належить (*див. рис.*). Пряма a, паралельна площині α, перетинає сторони AB і BC відповідно у точках E і F так, що $AE:EB=1:2$. Знайдіть периметр трикутника BEF, якщо $AB=6$ см.



А	Б	В	Г	Д
18 см	9 см	6 см	12 см	15 см

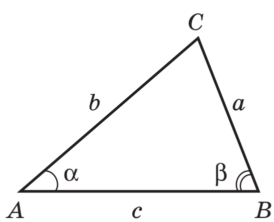
6. До супермаркету привезли 10 ц фруктів, із них 1 ц привезли першого дня, 5 ц — другого дня, а решту — третього. Яку частину всіх фруктів привезли третього дня?

А	Б	В	Г	Д
$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$

7. На рисунку зображено трикутник ABC,

$$AB=c,\ AC=b,\ BC=a,\ \angle BAC=\alpha,\ \angle ABC=\beta.$$

Укажіть ПРАВИЛЬНУ рівність.



А	Б	В	Г	Д
$\frac{c}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}$	$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{c}{\sin\beta}$	$\frac{a}{\sin\beta}=\frac{b}{\sin\alpha}$	$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}$	$\frac{c}{\sin\alpha}=\frac{a}{\sin\beta}$

8. Обчисліть: $\log_{\sqrt{6}} 36$.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{1}{2}$	2	4	$\frac{1}{4}$	12

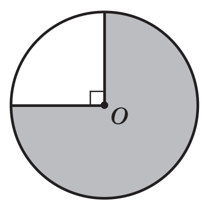
9. Розв'яжіть рівняння $\sqrt{6}\sin x = \sqrt{3}$.

А	Б	В
Коренів немає	$(-1)^n \arcsin\sqrt{2} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$	$(-1)^n \arcsin\sqrt{2} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$
Г	**Д**	
$(-1)^n \frac{\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$	$(-1)^n \frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$	

10. У коробці лежать 15 олівців, із яких 3 — жовті. Навмання виймають один олівець. Яка ймовірність того, що він НЕ жовтий?

А	Б	В	Г	Д
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{3}$

11. Знайдіть площу зафарбованої частини круга з центром у точці O (*див. рис.*), якщо його радіус дорівнює 6 см.



А	Б	В	Г	Д
3π см^2	6π см^2	9π см^2	18π см^2	27π см^2

12. Розв'яжіть систему рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{18}{x+y} = 3, \\ x = 2y. \end{cases}$$

Для одержаного розв'язку $(x_0; y_0)$ системи обчисліть ДОБУТОК $x_0 \cdot y_0$.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{1}{2}$	8	6	$\frac{1}{27}$	18

13. Площа бічної поверхні правильної чотирикутної призми дорівнює 96 см^2, а довжина бічного ребра — 4 см. Знайдіть площу основи цієї призми.

А	Б	В	Г	Д
24 см^2	12 см^2	36 см^2	48 см^2	16 см^2

14. Знайдіть множину значень функції $y = x^2 - 16$.

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty;+\infty)$	$[0;+\infty)$	$(-\infty;-4]\cup[4;+\infty)$	$[16;+\infty)$	$[-16;+\infty)$

15. Укажіть ПРАВИЛЬНУ нерівність, якщо $a = \frac{5}{12}$, $b = 0{,}5$, $c = \frac{1}{3}$.

А	Б	В	Г	Д
$a < c < b$	$c < b < a$	$c < a < b$	$b < c < a$	$a < b < c$

16. Графік парної функції, визначеної на проміжку $(-\infty;+\infty)$, проходить через точку $(6;-11)$. Через яку з наведених точок ОБОВ'ЯЗКОВО проходить графік цієї функції?

А	Б	В	Г	Д
$(6;11)$	$(-6;-11)$	$(-6;11)$	$(-11;6)$	$(-11;-6)$

17. Укажіть проміжок, якому належить корінь рівняння

$$\sqrt{3-x} = 4.$$

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty;-13)$	$[-13;-12)$	$[-12;12)$	$[12;13)$	$[13;+\infty)$

18. Скільки квадратних сантиметрів жерсті необхідно, щоб виготовити 10 консервних банок циліндричної форми (діаметр циліндра дорівнює 8 см, його висота — 4 см, на шви і відходи витрачається 0,1 від площі повної поверхні циліндра (банки))?

А	Б	В	Г	Д
2112π см^2	352π см^2	640π см^2	528π см^2	704π см^2

19. Розв'яжіть нерівність $2\log_{\frac{1}{9}} x > 1$.

А	Б	В	Г	Д
$\left(\frac{1}{81};+\infty\right)$	$\left(0;\frac{1}{81}\right)$	$\left(\frac{1}{3};+\infty\right)$	$\left(0;\frac{1}{3}\right)$	$\left(-\infty;\frac{1}{3}\right)$

20. Функція $y=f(x)$ є диференційовною на множині дійсних чисел. Дотична, проведена до графіка цієї функції у точці $x_0=4$, утворює з додатним напрямком осі абсцис кут $135°$. Обчисліть значення похідної функції $y=3f(x)-2x^2$ у точці $x_0=4$.

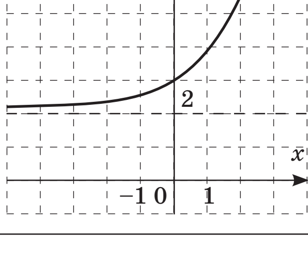
А	Б	В	Г	Д
−4	−5	−19	−13	−11

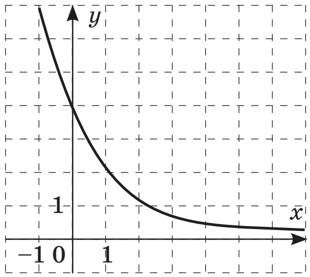
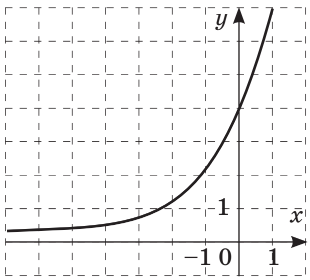
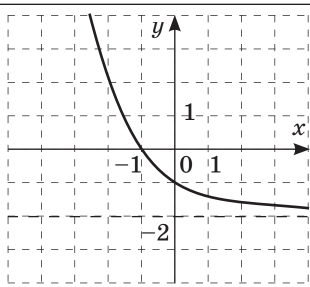
Завдання 21–24 передбачають установлення відповідності. До кожного рядка, позначеного ЦИФРОЮ, доберіть один відповідник, позначений БУКВОЮ, поставте позначки в бланку відповідей на перетині відповідних рядків (цифри) і стовпців (букви).

21. Установіть відповідність між виразом (1–4) та його значенням (А–Д), якщо $x=2$.

1	$1-\frac{x}{x-1}$	А	$-\frac{1}{2}$
2	$1:\frac{x}{1-x}$	Б	$\frac{1}{2}$
3	$\frac{x}{x^2-1}\cdot\frac{x+1}{2x}$	В	−1
4	$\frac{x}{x+1}\cdot\left(1-x^2\right)+x^2$	Г	1
		Д	2

22. Установіть відповідність між графіком (1–4) та функцією (А–Д).

1		А	$y=\left(\frac{1}{2}\right)^x-2$

2		Б	$y=2^x-2$
3		В	$y=2^x+2$
4		Г	$y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-2}$
		Д	$y=2^{x+2}$

23. Установіть відповідність між геометричною фігурою (1–4) та її периметром (А–Д).

1	Квадрат, сторона якого дорівнює 6 см	А	16 см
2	Прямокутник, сторони якого дорівнюють 4 см і 6 см	Б	18 см
3	Правильний шестикутник, вписаний у коло радіуса 6 см	В	20 см
4	Рівнобедрений трикутник, основа якого дорівнює 6 см, а висота, проведена до основи, — 4 см	Г	24 см
		Д	36 см

24. У прямокутній декартовій системі координат у просторі задано точки $A(2;-3;4)$, $B(-1;2;4)$, C і D, де точка C — проекція точки A на вісь z, точка D — проекція точки B на площину xy. Установіть відповідність між вектором (1–4) та його координатами (А–Д).

1	$\overrightarrow{AB}$	А	$(0;0;-4)$
2	$\overrightarrow{AC}$	Б	$(-3;5;0)$
3	$\overrightarrow{BD}$	В	$(-1;2;-4)$
4	$\overrightarrow{CD}$	Г	$(-3;-1;0)$
		Д	$(-2;3;0)$

Розв'яжіть завдання 25–30. Одержані відповіді запишіть у зошиті та бланку відповідей.

25. До книжкового магазину завезли лише підручники з математики, фізики і географії. Підручники з математики становлять 60 % усіх завезених підручників, підручники з фізики — 40 % усіх підручників із математики, а підручників із географії завезли 80.

1. Скільки відсотків усіх завезених підручників до магазину становлять підручники з географії?

2. Скільки всіх підручників завезли до цього магазину?

26. Діагоналі ромба $ABCD$ перетинаються у точці O. Коло з центром у точці A проходить через вершини B і D та перетинає діагональ AC у точці E, $AC = 48$ см, $OE = 2$ см.

1. Знайдіть периметр ромба $ABCD$ (у см).

2. Обчисліть площу ромба $ABCD$ (у см^2).

27. Розв'яжіть рівняння $16 \cdot 4^{x+4} + 15 \cdot 2^{x+4} = 1$. Якщо рівняння має один корінь, то запишіть ЙОГО у відповіді, якщо рівняння має кілька коренів, то у відповіді запишіть їх ДОБУТОК. Якщо рівняння не має коренів, запишіть у відповіді число 100.

28. У кінотеатрі кожний наступний ряд містить на 2 крісла більше, ніж попередній, а всього в залі 15 рядів. Скільки місць у першому ряду, якщо всього у залі 420 місць?

29. Знайдіть значення виразу

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{8}\right)^2 - \frac{12}{\sqrt{6}} - \left(2\sqrt{6}\right)^2.$$

30. В основі трикутної піраміди лежить прямокутний трикутник, катети якого дорівнюють 4 і $4\sqrt{2}$. Знайдіть об'єм V конуса, описаного навколо цієї піраміди, якщо довжина його твірної дорівнює $4\sqrt{7}$. У відповіді запишіть ЗНАЧЕННЯ $\dfrac{V}{\pi}$.

Поглиблений рівень

Розв'яжіть завдання 31–34. Одержані відповіді запишіть у зошиті та бланку відповідей.

31. Обчисліть значення виразу $\dfrac{\sin^2 3^\circ + \sin^2 6^\circ + \cos 3^\circ \cos 9^\circ}{40}$.

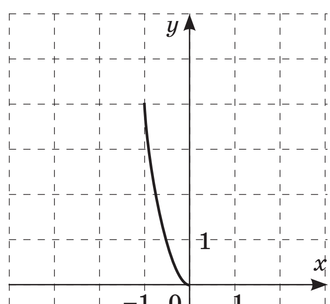
32. Скільки непарних шестицифрових чисел, усі цифри яких різні, можна записати, використовуючи цифри 1, 3, 4, 7, 8 і 9?

33. Через сторону нижньої основи і протилежну вершину верхньої основи правильної трикутної призми проведено площину, яка утворює з площиною основи кут 60°. Об'єм цієї призми дорівнює $3\sqrt[4]{27}$ см^3. Знайдіть площу утвореного перерізу (у см^2).

34. На рисунку зображено фрагмент графіка функції

$$f(x) = ax^2 + bx.$$

Площа фігури, обмеженої графіком функції $y = f(x)$ і прямими $x = -1$, $y = 0$, дорівнює $\dfrac{5}{3}$. Визначте ЗНАЧЕННЯ $f(6)$.



Розв'язання завдань 35, 36 повинно мати обґрунтування. Запишіть послідовні логічні дії та пояснення, зробіть посилання на математичні факти, із яких випливає те чи інше твердження. Якщо потрібно, проілюструйте розв'язання завдань рисунками, графіками, схемами, таблицями.

35. Бісектриса BD прямокутного трикутника ABC $(\angle ACB = 90°)$ дорівнює $3\sqrt{2}$ см, а кут BAC — $30°$. На катеті BC позначено точку K, а на бісектрисі BD — точку M так, що

$$BK : KC = 1 : 2,\ MD = 2\sqrt{2}\ \text{см}.$$

1. Доведіть, що чотирикутник $KMDC$ є трапецією.

2. Визначте площу трапеції $KMDC$.

36. При яких значеннях параметра a рівняння

$$\frac{x^2}{\lg\left(40a^2+13a+1\right)}+\frac{2\sqrt{x^2-2x+1}}{a\lg\left(40a^2+13a+1\right)}=0$$

має рівно чотири різні корені?

ВІДПОВІДІ ТА РОЗВ’ЯЗАННЯ ДО ЗАВДАНЬ

РОЗДІЛ 1. Планіметрія

ТЕСТ 1
Найпростіші геометричні фігури. Трикутники

Варіант 1

Завдання, №	1	2	3	4	5	6
Відповідь	Г	В	Д	Б	Г	Д

Завдання, №	7	8	9	10	11
Відповідь	1–В, 2–Д, 3–Г, 4–А	1. 90. 2. 63	30	60	12,75

Базовий рівень

10. У рівнобедреному трикутнику ABC $(AB = BC)$ проведено бісектрису AL,

$$BL = \frac{169}{23} \text{ см}, \; CL = \frac{130}{23} \text{ см}.$$

Знайдіть площу трикутника ABC (у см^2).

Розв’язання

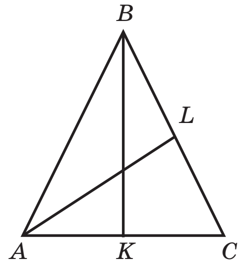
Знайдемо BC. Маємо:

$$BC = BL + LC = \frac{169}{23} + \frac{130}{23} = \frac{299}{23} = 13 \text{ (см)}.$$

Оскільки AL — бісектриса трикутника ABC, то

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BL}{LC}; \; \frac{13}{AC} = \frac{\frac{169}{23}}{\frac{130}{23}}; \; \frac{13}{AC} = \frac{169}{130}; \; AC = 10 \text{ (см)}.$$

Проведемо $BK \perp AC$ (*див. рис.*).



Тоді $AK = KC = 5$ см. Із прямокутного трикутника ABK:

$$BK = \sqrt{AB^2 - AK^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12 \text{ (см)}.$$

Отже,

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BK = AK \cdot BK = 5 \cdot 12 = 60 \text{ (см}^2\text{)}.$$

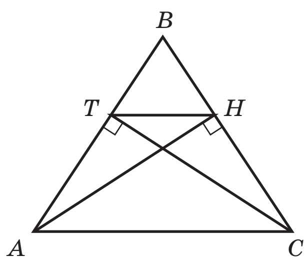
Відповідь. 60.

Поглиблений рівень

11. У трикутнику ABC із вершин A і C на сторони BC і AB проведені висоти AH і CT. Знайдіть сторону AC, якщо периметр трикутника ABC дорівнює 51, периметр трикутника BHT — 24, а радіус кола, описаного навколо трикутника BHT, — 3,4.

Розв'язання

Побудуємо рисунок.



Із прямокутного трикутника ABH:

$$\cos B = \frac{BH}{AB}.$$

Із прямокутного трикутника BCT:

$$\cos B = \frac{BT}{BC}.$$

Маємо:

$$\frac{BH}{AB}=\frac{BT}{BC}.$$

Оскільки кут B — спільний, то трикутники ABC і HBT подібні за двома сторонами і кутом між ними. Тому

$$\frac{BH}{AB}=\frac{BT}{BC}=\frac{HT}{AC}=\frac{P_{\Delta BHT}}{P_{\Delta ABC}}=\cos B;\ \cos B=\frac{24}{51}=\frac{8}{17};$$

кут B — гострий. Тоді

$$\sin B=\sqrt{1-\left(\frac{8}{17}\right)^2}=\frac{15}{17}.$$

Із трикутника BHT:

$$\frac{TH}{\sin B}=2R,$$

де R — радіус кола, описаного навколо трикутника BHT;

$$TH=2R\sin B=2\cdot 3{,}4\cdot\frac{15}{17}=6.$$

Оскільки $\cos B=\dfrac{HT}{AC}$, то

$$AC=\frac{HT}{\cos B}=\frac{6}{\frac{8}{17}}=12{,}75.$$

Відповідь. 12,75.

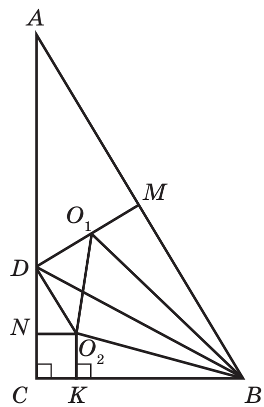
12. У прямокутному трикутнику ABC із прямим кутом C проведено бісектрису BD, $AC=2\sqrt{3}$ см, $BC=2$ см.

1. Доведіть, що центр кола, вписаного в трикутник ABD, лежить на медіані, проведеній із вершини D.

2. Знайдіть відстань між центрами двох кіл, вписаних у трикутники ABD і BCD.

Розв'язання

Побудуємо рисунок.



1. Із прямокутного трикутника ABC:

$$\operatorname{tg} B=\frac{AC}{BC}=\frac{2\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3},$$

звідси

$$\angle B=60^\circ.$$

Тоді $\angle A = 30°$. Оскільки BD — бісектриса трикутника ABC, то $\angle ABD = 30°$.

Отже, трикутник ADB — рівнобедрений з основою AB. Проведемо $DM \perp AB$. Тоді DM — висота і медіана. Нехай точка O_1 — центр кола, вписаного в трикутник ABD. У рівнобедреному трикутнику центр вписаного кола лежить на висоті, проведеній до основи. Тому центр кола, вписаного в трикутник ABD, лежить на медіані, проведеній із його вершини D, що й потрібно було довести.

2. *Спосіб 1.* Із прямокутного трикутника BCD:

$$\operatorname{tg}\angle CBD = \frac{CD}{BC};\ CD = 2\operatorname{tg}30° = \frac{2\sqrt{3}}{3}\ \text{(см)};$$

$$\cos\angle CBD = \frac{BC}{BD};\ BD = \frac{2}{\cos 30°} = \frac{2}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{4\sqrt{3}}{3}\ \text{(см)}.$$

Нехай точка O_2 — центр кола, вписаного в трикутник BCD, O_2K — радіус цього кола. Тоді

$$O_2K = \frac{BC + CD - BD}{2} = \frac{2 + \frac{2\sqrt{3}}{3} - \frac{4\sqrt{3}}{3}}{2} = \frac{6 - 2\sqrt{3}}{6} = \frac{3 - \sqrt{3}}{3}\ \text{(см)}.$$

Оскільки O_1M — радіус кола, вписаного в трикутник ABD, то BO_1 — бісектриса кута DBM. Тому

$$\angle O_1BM = \frac{30°}{2} = 15°.$$

Аналогічно BO_2 — бісектриса кута CBD;

$$\angle O_2BK = \frac{30°}{2} = 15°.$$

Із прямокутного трикутника O_2BK:

$$\sin\angle O_2BK = \frac{O_2K}{O_2B};\ O_2B = \frac{3 - \sqrt{3}}{3\sin 15°}.$$

Із прямокутного трикутника ABC:

$$AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{4 + 12} = 4\ \text{(см)}.$$

Маємо:

$$BM = \frac{AB}{2} = \frac{4}{2} = 2\ \text{(см)}.$$

Із прямокутного трикутника O_1BM:

$$\cos\angle O_1BM=\frac{BM}{O_1B};\ O_1B=\frac{2}{\cos15^\circ}.\ \angle O_1BO_2=60^\circ-2\cdot15^\circ=30^\circ.$$

Із трикутника O_1BO_2 за теоремою косинусів:

$$O_1O_2^2=O_1B^2+O_2B^2-2O_1B\cdot O_2B\cos\angle O_1BO_2=$$

$$=\frac{\left(3-\sqrt{3}\right)^2}{9\sin^2 15^\circ}+\frac{4}{\cos^2 15^\circ}-2\cdot\frac{3-\sqrt{3}}{3\sin15^\circ}\cdot\frac{2}{\cos15^\circ}\cdot\cos30^\circ=$$

$$=\frac{\left(3-\sqrt{3}\right)^2}{9\cdot\dfrac{1-\cos30^\circ}{2}}+\frac{4}{\dfrac{1+\cos30^\circ}{2}}-8\cdot\frac{3-\sqrt{3}}{3\sin30^\circ}\cdot\cos30^\circ=$$

$$=\frac{12-6\sqrt{3}}{9\cdot\dfrac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}}+\frac{4}{\dfrac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}}-8\cdot\frac{3-\sqrt{3}}{3\cdot\frac{1}{2}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{8\cdot\left(2-\sqrt{3}\right)}{3\cdot\left(2-\sqrt{3}\right)}+\frac{16}{2+\sqrt{3}}-8\cdot\left(\sqrt{3}-1\right)=$$

$$=\frac{8}{3}+16\cdot\left(2-\sqrt{3}\right)-8\cdot\left(\sqrt{3}-1\right)=\frac{128-72\sqrt{3}}{3}=\frac{4}{9}\cdot\left(96-54\sqrt{3}\right);$$

$$O_1O_2=\frac{2}{3}\sqrt{96-54\sqrt{3}}\ \text{см}.$$

Спосіб 2. Бісектриси DM і DO_2 суміжних кутів ADB і BDC утворюють прямий кут, отже, трикутник O_1DO_2 — прямокутний із прямим кутом D. Тоді за теоремою Піфагора

$$O_1O_2=\sqrt{DO_1^2+DO_2^2}.$$

Оскільки $\angle BDC=60^\circ$, то $\angle CDO_2=30^\circ$. Із прямокутного трикутника DO_2C:

$$DO_2=2O_2N=\frac{2}{3}\left(3-\sqrt{3}\right)\ \text{см}.$$

Із прямокутного трикутника ADM ($\angle M=90^\circ$) маємо:

$$DM=AM\,\mathrm{tg}\,30^\circ=\frac{2}{3}\sqrt{3}\ \text{см}.$$

$$DO_1=DM-O_1M,$$

де

$$O_1M=\frac{S_{ADB}}{p_{ADB}}=\frac{4\sqrt{3}}{3\left(2+\dfrac{4\sqrt{3}}{3}\right)}=\frac{4\sqrt{3}}{2\left(3+2\sqrt{3}\right)}=2\left(2-\sqrt{3}\right)\ (\text{см}).$$

$$DO_1=\frac{2\sqrt{3}}{3}-\left(4-2\sqrt{3}\right)=\frac{8\sqrt{3}-12}{3}\ \text{(см)}.$$

$$O_1O_2=\sqrt{\left(\frac{8\sqrt{3}-12}{3}\right)^2+\frac{4}{9}\left(3-\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{\frac{128-72\sqrt{3}}{3}}=\frac{2}{3}\sqrt{96-54\sqrt{3}}\ \text{(см)}.$$

Відповідь. 2. $\frac{2}{3}\sqrt{96-54\sqrt{3}}$ см.

Варіант 2

Завдання, №	1	2	3	4	5	6
Відповідь	Д	Г	Б	Г	Б	Г

Завдання, №	7	8	9	10	11
Відповідь	1–В, 2–Б, 3–А, 4–Г	1. 45. 2. 27	56	120	12

Завдання 12. 2. $\sqrt{32-18\sqrt{3}}$ см.

ТЕСТ 2
Чотирикутники. Многокутники

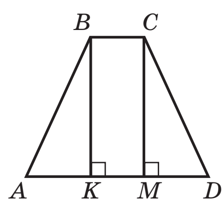
Варіант 1

Завдання, №	1	2	3	4	5	6
Відповідь	Д	В	Г	Б	Д	В

Завдання, №	7	8	9	10	11
Відповідь	1–Б, 2–Г, 3–Д, 4–А	1. 12. 2. 156	60	210	192

Базовий рівень

10. Периметр рівнобічної трапеції дорівнює 62 см, а її основи — 6 см і 22 см. Знайдіть площу цієї трапеції (у см^2).



Розв'язання

Проведемо $BK\perp AD$, $CM\perp AD$ (*див. рис.*). Маємо:

$$AB=CD=\frac{P_{ABCD}-AD-BC}{2}=\frac{62-22-6}{2}=17\ \text{(см)};$$

$$AK = MD = \frac{AD - BC}{2} = \frac{22 - 6}{2} = 8 \text{ (см)}.$$

Із прямокутного трикутника ABK:

$$BK = \sqrt{AB^2 - AK^2} = \sqrt{17^2 - 8^2} = 15 \text{ (см)}.$$

Тоді

$$S_{ABCD} = \frac{BC + AD}{2} \cdot BK = \frac{6 + 22}{2} \cdot 15 = 210 \text{ (см}^2\text{)}.$$

Відповідь. 210.

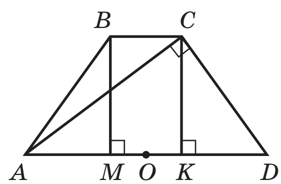
Поглиблений рівень

11. Навколо трапеції описане коло, діаметром якого є більша основа трапеції. Обчисліть площу цієї трапеції, якщо її бічна сторона дорівнює 15, а висота — 12.

Розв'язання

Нехай точка O — центр кола, описаного навколо трапеції $ABCD$, AD — діаметр цього кола. $BM \perp AD$, $CK \perp AD$ (*див. рис.*),

$$CD = 15, \; BM = CK = 12.$$



Оскільки навколо трапеції описано коло, то вона рівнобічна, $AB = CD$. Із прямокутного трикутника CKD:

$$KD = \sqrt{CD^2 - CK^2} = \sqrt{15^2 - 12^2} = 9.$$

Вписаний кут ACD спирається на діаметр, тому $\angle ACD = 90°$. Із прямокутного трикутника ACD:

$$CK^2 = AK \cdot KD; \; AK = \frac{12^2}{9} = 16.$$

Тоді

$$AD = AK + KD = 16 + 9 = 25; \; MK = AK - AM = 16 - 9 = 7;$$

$$BC = MK = 7.$$

Отже,

$$S_{ABCD} = \frac{BC + AD}{2} \cdot BM = \frac{7 + 25}{2} \cdot 12 = 192.$$

Відповідь. 192.

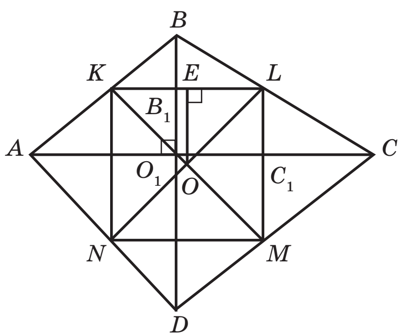
12. Точки K, L, M і N — середини сторін опуклого чотирикутника $ABCD$, діагоналі чотирикутника $KLMN$ рівні і перетинаються в точці O, кут KOL дорівнює $60°$, а периметр чотирикутника $KLMN$ — $18+6\sqrt{3}$.

1. Доведіть, що діагоналі чотирикутника $ABCD$ перпендикулярні.

2. Знайдіть площу чотирикутника $ABCD$.

Розв'язання

Побудуємо рисунок.



1. Оскільки $AK = KB$, $AN = ND$, то KN — середня лінія трикутника ABD.

Тому $KN \parallel BD$, аналогічно $LM \parallel BD$. Звідси $KN \parallel LM$. Маємо:

$$KN = LM = \frac{1}{2}BD.$$

Отже, $KLMN$ — паралелограм. За умовою $LN = KM$. Тому $KLMN$ — прямокутник. Нехай діагоналі чотирикутника $ABCD$ перетинаються у точці O_1, відрізки KL і BD — у точці B_1, а відрізки LM і AC — у точці C_1. Оскільки $KL \parallel AC$, $KL \perp LM$, то $LM \perp AC$.

$LM \parallel BD$, $KL \perp LM$, тому $KL \perp BD$. Дістали, що $O_1B_1LC_1$ — прямокутник, тобто $\angle BO_1C = 90°$. Отже, $AC \perp BD$, що й потрібно було довести.

2. Нехай $KL = x$, тоді з прямокутного трикутника KLM

$$(\angle LKO = 60°)\ LM = KL\,\mathrm{tg}\,60° = \sqrt{3}x.$$

$$P_{KLMN} = 2\left(x + \sqrt{3}x\right) = 18 + 6\sqrt{3},$$

звідки

$$x=\frac{9+3\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}=\frac{3\sqrt{3}\left(\sqrt{3}+1\right)}{1+\sqrt{3}}=3\sqrt{3}.$$

Отже, $KL=3\sqrt{3}$ см, $LM=9$ см.

$BD=2LM=2\cdot 9=18$ см; $AC=2KL=2\cdot 3\sqrt{3}=6\sqrt{3}$ см.

Отже,

$$S_{ABCD}=\frac{1}{2}AC\cdot BD=\frac{1}{2}\cdot 18\cdot 6\sqrt{3}=54\sqrt{3}.$$

Відповідь. 2. $54\sqrt{3}$.

Варіант 2

Завдання, №	1	2	3	4	5	6
Відповідь	В	Б	В	Г	Д	Б

Завдання, №	7	8	9	10	11
Відповідь	1–Б, 2–А, 3–Д, 4–В	1. 15. 2. 255	76	456	256

Завдання 12. 2. 96 см^2.

ТЕСТ 3
Коло. Круг

Варіант 1

Завдання, №	1	2	3	4	5	6
Відповідь	А	Г	Б	Д	В	Д

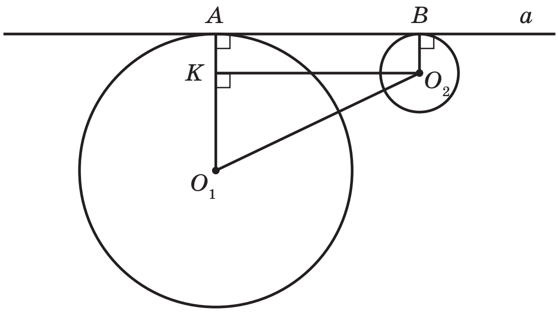
Завдання, №	7	8	9	10	11
Відповідь	1–Г, 2–В, 3–А, 4–Д	1. 18. 2. 288	110	7	15

Базовий рівень

10. Пряма a є спільною зовнішньою дотичною двох кіл із центрами в точках O_1 і O_2, точка A — точка дотику прямої a з колом із центром у точці O_1, точка B — точка дотику цієї прямої з колом із центром у точці O_2, $AB=12$ см, $O_1O_2=13$ см, радіус кола з центром у точці O_2 дорівнює 2 см. Знайдіть радіус кола з центром у точці O_1 (у см).

Розв'язання

Оскільки AB — спільна дотична до двох кіл, то $O_1A \perp AB$, $O_2B \perp AB$ (*див. рис.*). Тому $O_1A \parallel O_2B$. Отже, O_1ABO_2 — прямокутна трапеція. Проведемо $O_2K \perp O_1A$.



Із прямокутного трикутника O_1KO_2:

$$O_1K = \sqrt{O_1O_2^2 - O_2K^2} = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5 \text{ (см)}.$$

Тоді

$$O_1A = O_1K + KA = 5 + 2 = 7 \text{ (см)}.$$

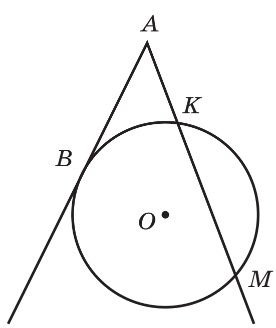
Відповідь. 7.

Поглиблений рівень

11. Із точки A до кола проведено дотичну AB (B — точка дотику) і січну, яка перетинає коло в точках K і M, причому точка K належить відрізку AM, а довжина дотичної AB на 10 см більша за довжину зовнішнього відрізка AK січної і на 25 см менша від довжини її внутрішнього відрізка KM. Обчисліть довжину дотичної AB (у см).

Розв'язання

Побудуємо рисунок.



Оскільки з точки A до кола проведено дотичну AB (B — точка дотику) і січну, яка перетинає коло в точках K і M, то

$$AB^2 = AK \cdot AM.$$

Нехай $AB = x$ см, тоді

$$AK = x - 10 \text{ см}, \; KM = x + 25 \text{ см},$$

$$AM = AK + KM = x - 10 + x + 25 = 2x + 15 \text{ (см)}.$$

Маємо:

$$x^2 = (x - 10)(2x + 15); \; x^2 - 5x - 150 = 0; \; x_1 = -10, \; x_2 = 15.$$

Отже, $AB = 15$ см.

Відповідь. 15.

12. Точки K, M і N ділять коло на три дуги, довжини яких дорівнюють $\frac{\pi\sqrt{3}}{2}$, $\frac{2\pi\sqrt{3}}{3}$ і $\frac{5\pi\sqrt{3}}{6}$. Через точки K, M і N проведені до кола дотичні, які перетинаються в точках A, B і C (*див. рис. 1*).

1. Доведіть, що трикутник ABC прямокутний.

2. Знайдіть площу зафарбованої фігури.

Розв'язання

Нехай точка O — центр кола (*див. рис. 2*).

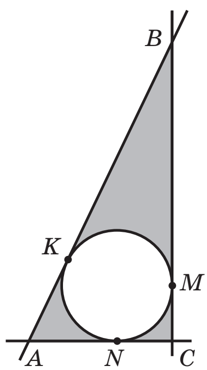


Рис. 1

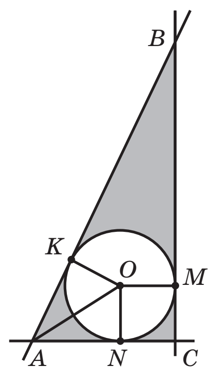


Рис. 2

1. Маємо:

$$\frac{\pi\sqrt{3}}{2} : \frac{2\pi\sqrt{3}}{3} : \frac{5\pi\sqrt{3}}{6} = 3 : 4 : 5.$$

Нехай $3x$, $4x$ і $5x$ — градусні міри дуг. Тоді

$$3x + 4x + 5x = 360°; \; 12x = 360°; \; x = 30°.$$

Тому $90°$, $120°$ і $150°$ — градусні міри дуг і відповідні центральні кути кола дорівнюють $90°$, $120°$ і $150°$. Оскільки $OM \perp BC$, $ON \perp AC$ і $\angle NOM = 90°$, то $\angle NCM = 90°$. Отже, трикутник ABC — прямокутний, що й потрібно було довести.

2. Нехай $\angle KOM = 150°$, тоді з чотирикутника $BKOM$ ($OM \perp BC$, $OK \perp AB$ як радіуси, проведені в точку дотику) $\angle KBM = 30°$. Знайдемо радіус кола. Маємо:

$$\frac{1}{4} \cdot 2\pi ON = \frac{\pi\sqrt{3}}{2};\ ON = \sqrt{3}.$$

Нехай $AC = x$.

Із прямокутного трикутника ABC:

$$BC = \frac{AC}{\operatorname{tg}\angle ABC} = \frac{x}{\operatorname{tg}30°} = \frac{x}{\frac{1}{\sqrt{3}}} = x\sqrt{3};$$

$$AB = 2AC = 2x.\ ON = \frac{AC + BC - AB}{2};\ \frac{x + x\sqrt{3} - 2x}{2} = \sqrt{3};$$

$$\frac{x\left(\sqrt{3} - 1\right)}{2} = \sqrt{3};\ x = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3} - 1};\ x = \frac{2\sqrt{3}\left(\sqrt{3} + 1\right)}{2};\ x = 3 + \sqrt{3}.$$

Тоді $AC = 3 + \sqrt{3}$, $BC = \sqrt{3}\left(3 + \sqrt{3}\right) = 3\sqrt{3} + 3$.

Нехай S — площа зафарбованої фігури, S_1 — площа круга, обмеженого колом із центром у точці O. Отже,

$$S = S_{\Delta ABC} - S_1 = \frac{1}{2} AC \cdot BC - \pi ON^2 = \frac{1}{2}\left(3 + \sqrt{3}\right)\left(3 + 3\sqrt{3}\right) - 3\pi =$$

$$= 6\sqrt{3} + 9 - 3\pi.$$

Відповідь. 2. $6\sqrt{3} + 9 - 3\pi$.

Варіант 2

Завдання, №	1	2	3	4	5	6
Відповідь	Г	Б	Д	В	А	В

Завдання, №	7	8	9	10	11
Відповідь	1–В, 2–Б, 3–Д, 4–А	1. 14. 2. 704	48	6	18

Завдання 12. 2. $648\sqrt{3} + 972 - 324\pi$.

ТЕСТ 4
Координати та вектори

Варіант 1

Завдання, №	1	2	3	4	5	6
Відповідь	Г	Д	Б	Г	В	Г

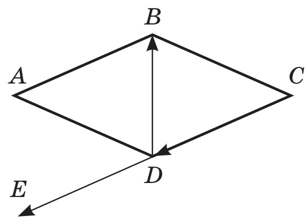
Завдання, №	7	8	9	10	11
Відповідь	1–В, 2–Д, 3–Г, 4–Б	1. −20. 2. −100	116	−24	12

Базовий рівень

10. Сторона ромба $ABCD$ дорівнює $4\sqrt{3}$, $\angle BAD = 60°$. Знайдіть скалярний добуток векторів $\overrightarrow{CD}$ і $\overrightarrow{DB}$.

Розв'язання

Відкладемо вектор $\overrightarrow{DE}$, $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{CD}$ (*див. рис.*).



$\angle BAD = \angle ADE = 60°$ — як внутрішні різносторонні при паралельних прямих AB і DE та січній AD. Оскільки $\angle BAD = 60°$, то рівнобедрений трикутник ABD $(AB = AD)$ є рівностороннім. Тому $AB = BD = 4\sqrt{3}$, $\angle BDA = 60°$. Маємо: $\angle BDE = 2 \cdot 60° = 120°$. Отже,

$$\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{DB} = \left|\overrightarrow{DE}\right| \cdot \left|\overrightarrow{DB}\right| \cdot \cos\angle BDE =$$

$$= 4\sqrt{3} \cdot 4\sqrt{3} \cdot \cos 120° = 48 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -24.$$

Відповідь. -24.

Поглиблений рівень

11. Відомо, що $\left|\vec{y}\right| = 15$, $\left|\vec{x} + \vec{y}\right| = 3\sqrt{61}$, $\left|\vec{x} - \vec{y}\right| = 3\sqrt{21}$. Знайдіть $\left|\vec{x}\right|$.

Розв'язання

Маємо:

$$\left|\vec{x} + \vec{y}\right|^2 = \left(\vec{x}\right)^2 + 2\vec{x}\vec{y} + \left(\vec{y}\right)^2; \ \left|\vec{x} - \vec{y}\right|^2 = \left(\vec{x}\right)^2 - 2\vec{x}\vec{y} + \left(\vec{y}\right)^2.$$

Тому

$$\left|\vec{x}\right|^2+2\vec{x}\vec{y}+\left|\vec{y}\right|^2=549;\ \left|\vec{x}\right|^2-2\vec{x}\vec{y}+\left|\vec{y}\right|^2=189.$$

Віднімемо почленно від першої рівності другу, дістанемо:

$$4\vec{x}\vec{y}=360,\ \vec{x}\vec{y}=90.$$

Отже,

$$\left|\vec{x}\right|^2-2\cdot 90+15^2=189;\ \left|\vec{x}\right|^2=144;\ \left|\vec{x}\right|=12.$$

Відповідь. 12.

12. Коло, описане навколо трикутника ABC, задане рівнянням

$$x^2+y^2-10x-8y+28=0.$$

Відомо, що $A(2;6)$, $B(8;2)$, а пряма

$$3x+2y-10=0$$

є дотичною до цього кола, проведеною в точці C.

1. Доведіть, що трикутник ABC прямокутний.

2. Знайдіть рівняння кола, вписаного в трикутник ABC.

Розв'язання

1. Знайдемо координати точки дотику C.

Маємо:

$$x^2-10x+25+y^2-8y+16+28-16-25=0;$$

$$x^2-10x+25+y^2-8y+16=13;\ (x-5)^2+(y-4)^2=13;\ y=5-\frac{3}{2}x.$$

Тоді

$$(x-5)^2+\left(5-\frac{3}{2}x-4\right)^2=13;\ \frac{13}{4}x^2-13x+13=0;\ x^2-4x+4=0;$$

$$(x-2)^2=0;\ x=2;\ y=5-\frac{3}{2}\cdot 2=2;\ C(2;2).$$

Знайдемо довжини сторін трикутника:

$$AC=\sqrt{(2-2)^2+(6-2)^2}=\sqrt{4^2}=4;\ BC=\sqrt{(8-2)^2+(2-2)^2}=\sqrt{6^2}=6;$$

$$AB=\sqrt{(2-8)^2+(6-2)^2}=\sqrt{6^2+4^2}=\sqrt{52}=2\sqrt{13}.$$

Оскільки

$$AC^2+BC^2=AB^2,$$

то трикутник ABC — прямокутний,

$$\angle ACB=90^\circ,$$

що й потрібно було довести.

2. Нехай точка O — центр кола, вписаного в трикутник ABC, OK і OM — його радіуси (*див. рис.*).

$$OK = \frac{AC+BC-AB}{2} = \frac{4+6-2\sqrt{13}}{2} = \frac{10-2\sqrt{13}}{2} = 5-\sqrt{13}.$$

Маємо:

$$OK \perp BC,\ OM \perp AC,\ MC = CK = 5-\sqrt{13}.$$

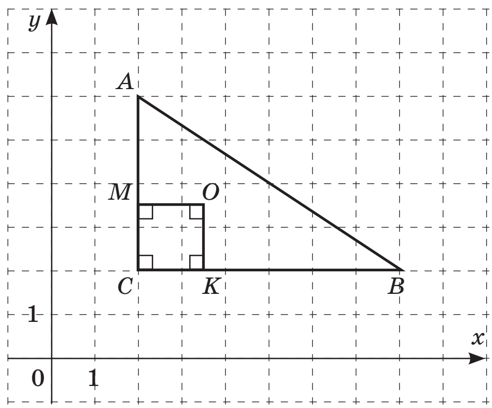
Оскільки точка $C(2;2)$, то $O\left(2+5-\sqrt{13};2+5-\sqrt{13}\right)$, тобто

$$O\left(7-\sqrt{13};7-\sqrt{13}\right).$$

Отже, рівняння вписаного кола має вигляд

$$\left(x-7+\sqrt{13}\right)^2+\left(y-7+\sqrt{13}\right)^2=\left(5-\sqrt{13}\right)^2;$$

$$\left(x-7+\sqrt{13}\right)^2+\left(y-7+\sqrt{13}\right)^2=38-10\sqrt{13}.$$



Відповідь. 2. $\left(x-7+\sqrt{13}\right)^2+\left(y-7+\sqrt{13}\right)^2=38-10\sqrt{13}.$

Варіант 2

Завдання, №	1	2	3	4	5	6
Відповідь	Д	Б	Г	Д	Г	В

Завдання, №	7	8	9	10	11
Відповідь	1–В, 2–Б, 3–А, 4–Д	1. −35. 2. −294	41	−54	14

Завдання 12. 2. $\left(x+8-\sqrt{10}\right)^2+\left(y-7+\sqrt{10}\right)^2=26-8\sqrt{10}.$

РОЗДІЛ 2. Стереометрія

ТЕСТ 1
Прямі та площини в просторі

Варіант 1

Завдання, №	1	2	3	4	5	6
Відповідь	Г	Б	Д	Г	В	Б

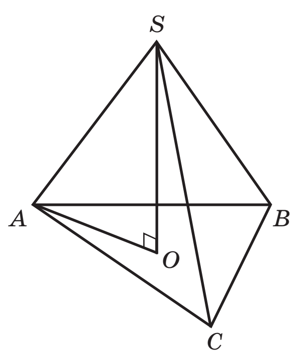
Завдання, №	7	8	9	10	11
Відповідь	1–Д, 2–В, 3–Б, 4–А	1. 20. 2. 25	42	8	18

Базовий рівень

10. Точка S віддалена від вершин трикутника ABC на відстань 10 см, $BC = 6\sqrt{2}$ см, $\angle ABC = 105°$, $\angle ACB = 30°$.
Знайдіть відстань (у см) від точки S до площини цього трикутника.

Розв'язання

Оскільки точка S рівновіддалена від усіх вершин трикутника ABC, то основа перпендикуляра SO — точка O $\left(SO \perp (ABC)\right)$ — є центром кола, описаного навколо цього трикутника, OA — радіус кола (*див. рис.*).



Маємо:

$$\angle BAC = 180° - \angle ABC - \angle ACB = 180° - 105° - 30° = 45°.$$

Тоді

$$OA = \frac{BC}{2\sin\angle BAC} = \frac{6\sqrt{2}}{2\sin 45^\circ} = \frac{6\sqrt{2}}{2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}} = 6 \text{ (см)}.$$

Із прямокутного трикутника AOS:

$$SO = \sqrt{SA^2 - OA^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8 \text{ (см)}.$$

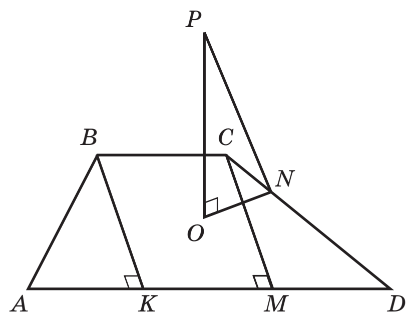
Відповідь. 8.

Поглиблений рівень

11. Площа рівнобічної трапеції дорівнює 180 см^2, а її основи відносяться як $1:4$. Точка P рівновіддалена від усіх сторін трапеції на відстань $6\sqrt{10}$ см. Знайдіть відстань (у см) від точки P до площини трапеції.

Розв'язання

Нехай $ABCD$ — рівнобічна трапеція (*див. рис.*), BC і AD — її основи, $S_{ABCD} = 180$ см^2, $BC:AD = 1:4$.



Оскільки точка P рівновіддалена від усіх сторін трапеції, то основа перпендикуляра PO — точка O $\left(PO \perp (ABC)\right)$ — є центром кола, вписаного в трапецію $ABCD$. Проведемо $ON \perp CD$, тоді за теоремою про три перпендикуляри $PN \perp CD$. Отже, $PN = 6\sqrt{10}$ см.

Нехай $BC = x$ см, $AD = 4x$ см. Якщо в трапецію можна вписати коло, то

$$AB + CD = BC + AD;\; 2AB = BC + AD;$$

$$AB = \frac{BC + AD}{2} = \frac{x + 4x}{2} = \frac{5x}{2} \text{ (см)}.$$

Проведемо $BK \perp AD$, $CM \perp AD$. Маємо:

$$AK = MD = \frac{AD - BC}{2} = \frac{4x - x}{2} = \frac{3x}{2} \text{ (см)}.$$

Із прямокутного трикутника ABK:

$$BK = \sqrt{AB^2 - AK^2} = \sqrt{\frac{25x^2}{4} - \frac{9x^2}{4}} = \sqrt{\frac{16x^2}{4}} = 2x \text{ (см)}.$$

Тоді

$$S_{ABCD} = \frac{BC + AD}{2} \cdot BK = AB \cdot BK = \frac{5x}{2} \cdot 2x = 5x^2 \text{ (см}^2\text{)};$$

$$5x^2 = 180;\ x^2 = 36;\ x = 6;\ BK = 2 \cdot 6 = 12 \text{ (см)}.$$

ON — радіус вписаного кола,

$$ON = \frac{1}{2} BK = \frac{1}{2} \cdot 12 = 6 \text{ (см)}.$$

Із прямокутного трикутника PON:

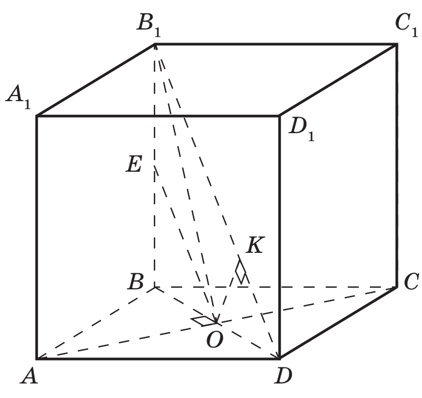
$$PO = \sqrt{PN^2 - ON^2} = \sqrt{360 - 36} = \sqrt{324} = 18 \text{ (см)}.$$

Відповідь. 18.

12. Точка E — середина ребра BB_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Відстань від точки E до прямої AC дорівнює $3\sqrt{3}$ см. Знайдіть відстань між прямими AC і B_1D.

Розв’язання

Нехай O — точка перетину діагоналей грані $ABCD$ (*див. рис.*).



Оскільки $BO \perp AC$, то $EO \perp AC$. Тому EO — відстань від точки E до прямої AC, $EO = 3\sqrt{3}$ см. Нехай $AB = x$ см, тоді $EB = \frac{x}{2}$ см.

Із прямокутного трикутника ABO:

$$AB^2 = AO^2 + BO^2;\ \ AB = 2 \cdot BO^2;\ \ BO = \frac{AB\sqrt{2}}{2} = \frac{x\sqrt{2}}{2} \text{ (см)}.$$

Із прямокутного трикутника BEO:

$$EO=\sqrt{EB^2+BO^2}=\sqrt{\frac{x^2}{4}+\frac{2x^2}{4}}=\sqrt{\frac{3x^2}{4}}=\frac{x\sqrt{3}}{2}\ (\text{см});\ \frac{x\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3};\ x=6;$$

$$AB=6\ \text{см};\ BO=\frac{6\sqrt{2}}{2}=3\sqrt{2}\ (\text{см});\ BD=2BO=2\cdot3\sqrt{2}=6\sqrt{2}\ (\text{см}).$$

Проведемо $OK\perp B_1D$. Оскільки пряма AC перпендикулярна до площини BDB_1, то $AC\perp OK$. Тому OK — спільний перпендикуляр до прямих AC і B_1D, тобто OK — шукана відстань.

Із прямокутного трикутника BB_1O:

$$B_1O=\sqrt{BB_1^2+BO^2}=\sqrt{36+18}=\sqrt{54}=3\sqrt{6}\ (\text{см}).$$

Із прямокутного трикутника BB_1D:

$$B_1D=\sqrt{BB_1^2+BD^2}=\sqrt{36+72}=6\sqrt{3}\ (\text{см}).$$

Нехай $KD=y$ см, тоді $B_1K=6\sqrt{3}-y$ см. Із прямокутних трикутників B_1OK і KOD:

$$OK^2=B_1O^2-B_1K^2,\ OK^2=OD^2-KD^2;$$

$$B_1O^2-B_1K^2=OD^2-KD^2;$$

$$54-\left(6\sqrt{3}-y\right)^2=18-y^2;\ 54-108+12\sqrt{3}y-y^2=18-y^2;$$

$$12\sqrt{3}y=72;\ y=\frac{72}{12\sqrt{3}};\ y=2\sqrt{3};\ KD=2\sqrt{3}\ \text{см}.$$

Тоді

$$OK=\sqrt{OD^2-KD^2}=\sqrt{18-12}=\sqrt{6}\ (\text{см}).$$

Відповідь. $\sqrt{6}$ см.

Варіант 2

Завдання, №	1	2	3	4	5	6
Відповідь	В	Д	Г	В	В	Д

Завдання, №	7	8	9	10	11
Відповідь	1–Г, 2–А, 3–В, 4–Д	1. 16. 2. 20	78	15	12

Завдання 12. $\sqrt{3}$ см.

ТЕСТ 2
Многогранники

Варіант 1

Завдання, №	1	2	3	4	5	6
Відповідь	Д	В	Г	Б	Д	В

Завдання, №	7	8	9	10	11
Відповідь	1–В, 2–Г, 3–А, 4–Д	1. 16. 2. 960	144	264	72

Базовий рівень

10. Деталь складається з двох прямокутних паралелепіпедів (*див. рис. 1*). Знайдіть площу повної поверхні цієї деталі (у см²).

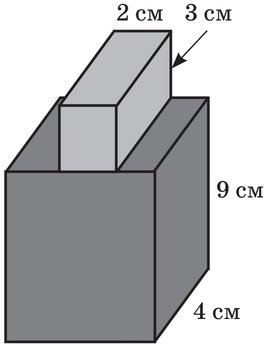


Рис. 1

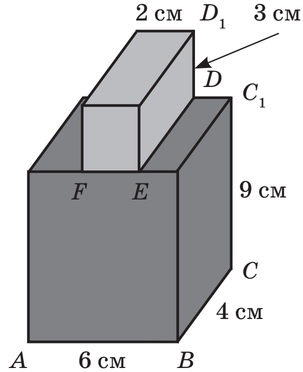


Рис. 2

Розв'язання

Площа повної поверхні деталі дорівнює сумі площ повної поверхні великого паралелепіпеда і бічної поверхні малого паралелепіпеда. Позначимо деякі вершини паралелепіпедів (*див. рис. 2*).

Знайдемо площу повної поверхні великого паралелепіпеда. Маємо:

$$S_1 = 2(AB + BC) \cdot CC_1 + 2AB \cdot BC = 2 \cdot (6+4) \cdot 9 + 2 \cdot 6 \cdot 4 = 228 \text{ (см}^2\text{)}.$$

Площа бічної поверхні малого паралелепіпеда:

$$S_2 = 2(DE + EF) \cdot DD_1 = 2 \cdot (2+4) \cdot 3 = 36 \text{ (см}^2\text{)}.$$

Тоді площа повної поверхні деталі дорівнює

$$S = S_1 + S_2 = 228 + 36 = 264 \text{ (см}^2\text{)}.$$

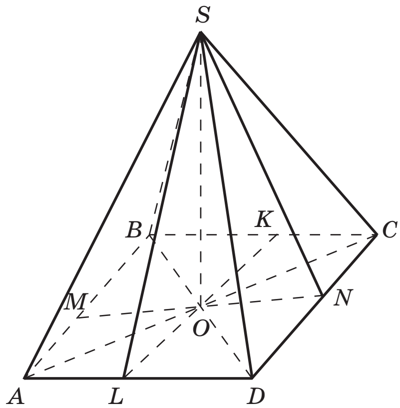
Відповідь. 264.

Поглиблений рівень

11. Основою піраміди є ромб, діагоналі якого дорівнюють 6 см і 8 см. Усі двогранні кути при основі піраміди дорівнюють 60°. Знайдіть площу повної поверхні цієї піраміди (у см^2).

Розв'язання

Нехай ромб $ABCD$ є основою піраміди $SABCD$ (*див. рис.*), $AC = 8$ см, $BD = 6$ см, $SO \perp (ABC)$.



Проведемо $MN \perp AB$, $LK \perp BC$, тоді $SM \perp AB$, $SK \perp BC$, $SN \perp CD$, $SL \perp AD$ (за теоремою про три перпендикуляри). Отже,

$$\angle SMO = \angle SKO = \angle SNO = \angle SLO = 60^\circ.$$

Оскільки двогранні кути при основі піраміди рівні, точка O — центр кола, вписаного в ромб $ABCD$. Маємо:

$$AO = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}\cdot 8 = 4 \text{ (см)}; \; BO = \frac{1}{2}BD = \frac{1}{2}\cdot 6 = 3 \text{ (см)}.$$

Із прямокутного трикутника ABO:

$$AB = \sqrt{AO^2 + BO^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5 \text{ (см)}.$$

Тоді

$$P_{ABCD} = 4AB = 4\cdot 5 = 20 \text{ (см)};$$

$$S_{ABCD} = \frac{AC\cdot BD}{2} = \frac{8\cdot 6}{2} = 24 \text{ (см}^2\text{)}; \; OL = \frac{2S_{ABCD}}{P_{ABCD}} = \frac{2\cdot 24}{20} = 2{,}4 \text{ (см)}.$$

Із прямокутного трикутника SLO:

$$SL = \frac{OL}{\cos\angle SLO} = \frac{2{,}4}{\cos 60^\circ} = \frac{2{,}4}{\frac{1}{2}} = 4{,}8 \text{ (см)}.$$

Очевидно, що

$$\Delta SMO = \Delta SKO = \Delta SNO = \Delta SLO.$$

Отже,

$$S_{\text{повн.}} = S_{\text{бічн.}} + S_{ABCD} = 4S_{\Delta SAD} + S_{ABCD} =$$

$$= 4\cdot\frac{1}{2}AD\cdot SL + 24 = 2\cdot 5\cdot 4{,}8 + 24 = 72 \text{ (см}^2\text{)}.$$

Відповідь. 72.

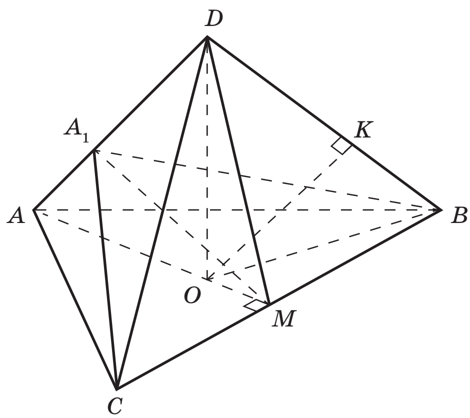
12. У правильній трикутній піраміді перпендикуляр, проведений із основи її висоти до бічного ребра, дорівнює d. Знайдіть площу бічної поверхні піраміди, якщо двогранний кут між її бічними гранями дорівнює α.

Розв'язання

Нехай $DABC$ — правильна трикутна піраміда (*див. рис.*),

$$DO \perp (ABC),\ OK \perp DB,\ OK = d.$$

Проведемо $CA_1 \perp AD$, $BA_1 \perp AD$. Тоді $\angle BA_1C = \alpha$.



Нехай $\angle DBO = \beta$. Із прямокутного трикутника BKO:

$$OB = \frac{OK}{\sin\angle KBO} = \frac{d}{\sin\beta}.$$

OB — радіус кола, описаного навколо трикутника ABC. Тому

$$OB = \frac{AB\sqrt{3}}{3};\ \frac{AB\sqrt{3}}{3} = \frac{d}{\sin\beta};\ AB = \frac{3d}{\sqrt{3}\sin\beta};\ AB = \frac{d\sqrt{3}}{\sin\beta}.$$

Із прямокутного трикутника DBO:

$$DO = OB\,\mathrm{tg}\angle DBO = \frac{d}{\sin\beta}\cdot\mathrm{tg}\beta = \frac{d}{\cos\beta}.$$

Проведемо $AM \perp BC$, тоді $A_1M \perp BC$. Маємо:

$$CM = \frac{AB}{2}.$$

Із прямокутного трикутника ACM:

$$AM = \sqrt{AC^2 - CM^2} = \sqrt{AB^2 - \frac{AB^2}{4}} = \sqrt{\frac{3AB^2}{4}} = \frac{AB\sqrt{3}}{2}.$$

Очевидно, що трикутник BA_1C — рівнобедрений. Тоді

$$\angle CA_1M = \frac{\alpha}{2}.$$

Оскільки $CA_1 \perp AD$, $BA_1 \perp AD$, то $AD \perp (BA_1C)$, а тому $AD \perp A_1M$.

Із прямокутного трикутника AA_1M:

$$A_1M = AM \sin\angle A_1AM = \frac{AB\sqrt{3}\sin\beta}{2}.$$

Із прямокутного трикутника CA_1M:

$$\operatorname{ctg}\angle CA_1M = \frac{A_1M}{CM} = \frac{\frac{AB\sqrt{3}\sin\beta}{2}}{\frac{AB}{2}} = \sqrt{3}\sin\beta;$$

$$\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{3}\sin\beta;\ \sin\beta = \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}.$$

OM — радіус кола, вписаного в трикутник ABC;

$$OM = \frac{AB\sqrt{3}}{6} = \frac{d\sqrt{3}}{\sin\beta}\cdot\frac{\sqrt{3}}{6} = \frac{d}{2\sin\beta}.$$

Із прямокутного трикутника DMO:

$$DM = \sqrt{DO^2 + OM^2} = \sqrt{\frac{d^2}{\cos^2\beta} + \frac{d^2}{4\sin^2\beta}} =$$

$$= d\sqrt{\frac{4\sin^2\beta + \cos^2\beta}{4\sin^2\beta\cos^2\beta}} = \frac{d\sqrt{3\sin^2\beta + 1}}{2\sin\beta\cos\beta}$$

Тоді

$$S_{\text{бічн.}} = \frac{P_{\Delta ABC}}{2}\cdot DM = \frac{3d\sqrt{3}}{2\sin\beta}\cdot\frac{d\sqrt{3\sin^2\beta+1}}{2\sin\beta\cos\beta} = \frac{3\sqrt{3}d^2\sqrt{3\sin^2\beta+1}}{4\sin^2\beta\cos\beta}.$$

Урахувавши, що

$$\sin\beta=\frac{1}{\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}},$$

матимемо:

$$\cos\beta=\sqrt{1-\sin^2\beta}=\sqrt{1-\frac{1}{3\,\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}}=\frac{\sqrt{3\,\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}-1}}{\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}}.$$

Отже,

$$S_{\text{бічн.}}=\frac{3\sqrt{3}d^2\sqrt{3\sin^2\beta+1}}{4\sin^2\beta\cos\beta}=\frac{3\sqrt{3}d^2\cdot\sqrt{\frac{3}{3\,\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}+1}}{4\cdot\frac{1}{3\,\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sqrt{3\,\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}-1}}{\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}}}=\frac{3\sqrt{3}d^2\cdot\frac{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}}{\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}}}{\frac{4\sqrt{3\,\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}-1}}{3\sqrt{3}\,\mathrm{tg}^3\frac{\alpha}{2}}}=$$

$$=3\sqrt{3}d^2\cdot\frac{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}}{\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{3\sqrt{3}\,\mathrm{tg}^3\frac{\alpha}{2}}{4\sqrt{3\,\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}-1}}=\frac{27d^2\,\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{4\cos\frac{\alpha}{2}\sqrt{3\,\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}-1}}.$$

Відповідь. $\dfrac{27d^2\,\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{4\cos\frac{\alpha}{2}\sqrt{3\,\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}-1}}$.

Варіант 2

Завдання, №	1	2	3	4	5	6
Відповідь	А	Г	Д	В	Г	Б

Завдання, №	7	8	9	10	11
Відповідь	1–Г, 2–В, 3–Д, 4–Б	1. 14. 2. 1176	196	166	54

Завдання 12. $\dfrac{3\sqrt{3}d^2\left(4\,\mathrm{ctg}^2\alpha+1\right)}{4\cos\alpha}$.

ТЕСТ 3
Тіла обертання. Комбінації тіл

Варіант 1

Завдання, №	1	2	3	4	5	6
Відповідь	Г	А	Д	В	Г	Б

Завдання, №	7	8	9	10	11
Відповідь	1–Д, 2–Г, 3–А, 4–В	1. 50. 2. 1500	450	80	256

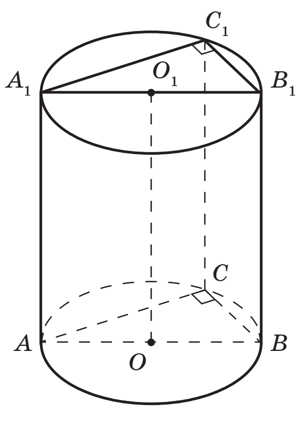
Базовий рівень

10. Основа прямої призми — прямокутний трикутник, катети якого дорівнюють 2 і 4. Довжина бічного ребра призми дорівнює $8\sqrt{5}$. Знайдіть площу бічної поверхні S циліндра, описаного навколо цієї призми. У відповіді запишіть значення $\frac{S}{\pi}$.

Розв'язання

Нехай прямокутний трикутник ABC із прямим кутом C є основою прямої призми $ABCA_1B_1C_1$, точки O і O_1 — центри основ циліндра, описаного навколо цієї призми (*див. рис.*),

$$AC = 2,\ BC = 4,\ AA_1 = 8\sqrt{5}.$$



Оскільки призма вписана в циліндр, то прямокутний трикутник ABC вписаний у коло основи циліндра, тому точка O — середина гіпотенузи AB. Із прямокутного трикутника ABC:

$$AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}.$$

Тоді

$$OA = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{5} = \sqrt{5}.$$

Бічне ребро призми є твірною циліндра. Отже, площа бічної поверхні циліндра дорівнює

$$S = 2\pi OA \cdot AA_1 = 2\pi \cdot \sqrt{5} \cdot 8\sqrt{5} = 80\pi.$$

Тому

$$\frac{S}{\pi} = \frac{80\pi}{\pi} = 80.$$

Відповідь. 80.

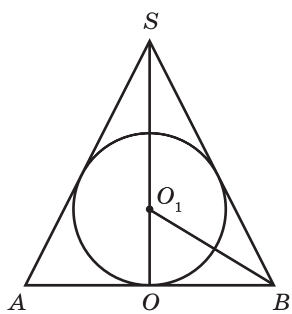
Поглиблений рівень

11. У конус, площа осьового перерізу якого дорівнює $\frac{432}{\pi}$ см^2, а висота — $\frac{18\sqrt{\pi}}{\pi}$ см, вписана сфера. Обчисліть площу цієї сфери (у см^2).

Розв'язання

Нехай SO — висота конуса, SA і SB — його твірні, точка O_1 – центр сфери, вписаної в конус. Проведемо площину, яка проходить через вісь конуса і центр сфери. У перерізі отримаємо рівнобедрений трикутник SAB (осьовий переріз конуса) із вписаним у нього великим колом сфери (*див. рис.*),

$$S_{\Delta SAB} = \frac{432}{\pi} \text{ см}^2,\ SO = \frac{18\sqrt{\pi}}{\pi} \text{ см}.$$



Оскільки центр кола, вписаного у рівнобедрений трикутник, лежить на висоті, проведеній до основи цього трикутника, то центр сфери лежить на висоті конуса.

Маємо:

$$S_{\Delta SAB}=\frac{1}{2}SO\cdot AB=SO\cdot OB;\ \frac{18\sqrt{\pi}}{\pi}\cdot OB=\frac{432}{\pi};\ OB=\frac{24}{\sqrt{\pi}}\ \text{см}.$$

Із прямокутного трикутника SOB:

$$SB=\sqrt{SO^2+OB^2}=\sqrt{\frac{324}{\pi}+\frac{576}{\pi}}=\sqrt{\frac{900}{\pi}}=\frac{30}{\sqrt{\pi}}\ (\text{см}).$$

Центр кола, вписаного в трикутник, є точкою перетину його бісектрис, тому BO_1 — бісектриса трикутника SOB.

Отже,

$$\frac{SO_1}{OO_1}=\frac{SB}{OB}.$$

Нехай $OO_1=x$ см, тоді

$$SO_1=SO-OO_1=\frac{18\sqrt{\pi}}{\pi}-x\ \text{см}.$$

Маємо:

$$\frac{\frac{18\sqrt{\pi}}{\pi}-x}{x}=\frac{\frac{30}{\sqrt{\pi}}}{\frac{24}{\sqrt{\pi}}};\ \frac{\frac{18\sqrt{\pi}}{\pi}-x}{x}=\frac{5}{4};$$

$$5x=\frac{72\sqrt{\pi}}{\pi}-4x;\ 9x=\frac{72\sqrt{\pi}}{\pi};\ x=\frac{8\sqrt{\pi}}{\pi};\ OO_1=\frac{8\sqrt{\pi}}{\pi}\ \text{см}.$$

Тоді площа сфери

$$S=4\pi OO_1^2=4\pi\cdot\frac{64}{\pi}=256\ (\text{см}^2).$$

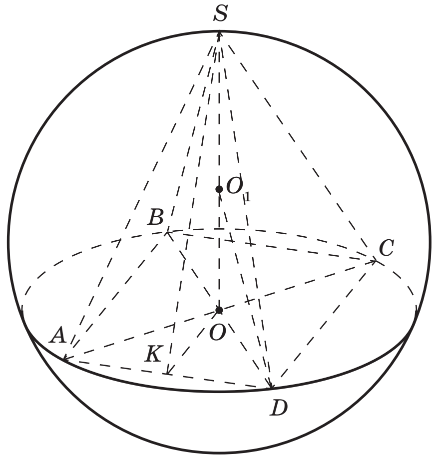
Відповідь. 256.

12. Площа бічної поверхні правильної чотирикутної піраміди дорівнює S, а бічне ребро утворює з висотою цієї піраміди кут α. Знайдіть радіус кулі, описаної навколо цієї піраміди.

Розв'язання

Нехай $SABCD$ — правильна чотирикутна піраміда, точка O_1 – центр кулі, описаної навколо цієї піраміди (*див. рис.*),

$$SO\perp(ABC),\ S_{\text{бічн.}}=S,\ \angle ASO=\alpha.$$



Центром кулі, описаної навколо піраміди, є точка перетину перпендикуляра до основи, який проведений із центра описаного навколо основи кола, і площини, що проходить через середину будь-якого ребра, перпендикулярно до нього. Тому центр кулі лежить на висоті піраміди. Нехай $AD = x$. Із прямокутного трикутника ADO:

$$AD^2 = AO^2 + OD^2;\ AD^2 = 2AO^2;\ AO = \frac{AD\sqrt{2}}{2} = \frac{x\sqrt{2}}{2}.$$

Із прямокутного трикутника ASO:

$$SA = \frac{AO}{\sin\angle ASO} = \frac{x\sqrt{2}}{2\sin\alpha}.$$

Проведемо $OK \perp AD$. Маємо:

$$AK = \frac{1}{2}AD = \frac{x}{2}.$$

Із прямокутного трикутника SAK:

$$SK = \sqrt{SA^2 - AK^2} = \sqrt{\frac{2x^2}{4\sin^2\alpha} - \frac{x^2}{2}} = x\sqrt{\frac{1}{2\sin^2\alpha} - \frac{1}{2}} = x\sqrt{\frac{1-\sin^2\alpha}{2\sin^2\alpha}} =$$

$$= x\sqrt{\frac{\cos^2\alpha}{2\sin^2\alpha}} = x\sqrt{\frac{\operatorname{ctg}^2\alpha}{2}} = \frac{x|\operatorname{ctg}\alpha|}{\sqrt{2}} = \frac{x\sqrt{2}\operatorname{ctg}\alpha}{2},$$

кут α — гострий, тому $\operatorname{ctg}\alpha > 0$. Оскільки

$$S_{\text{бічн.}} = \frac{P_{ABCD}}{2}\cdot SK = 2AD\cdot SK,$$

то

$$2x\cdot\frac{x\sqrt{2}\,\mathrm{ctg}\,\alpha}{2}=S;\ x^2\sqrt{2}\,\mathrm{ctg}\,\alpha=S;$$

$$x^2=\frac{S}{\sqrt{2}\,\mathrm{ctg}\,\alpha};\ x=\sqrt{\frac{S\sqrt{2}}{2\mathrm{ctg}\,\alpha}};$$

$$AD=\sqrt{\frac{S\sqrt{2}}{2\mathrm{ctg}\,\alpha}};\ AO=OD=\sqrt{\frac{S\sqrt{2}}{2\mathrm{ctg}\,\alpha}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{S\sqrt{2}}{\mathrm{ctg}\,\alpha}}.$$

Із прямокутного трикутника ASO:

$$SO=\frac{AO}{\mathrm{tg}\angle ASO}=\frac{1}{2\,\mathrm{tg}\,\alpha}\sqrt{\frac{S\sqrt{2}}{\mathrm{ctg}\,\alpha}}.$$

O_1D — радіус кулі,

$$O_1D=O_1S,\ O_1O=SO-O_1S=SO-O_1D.$$

Із прямокутного трикутника OO_1D:

$$O_1D^2=OO_1^2+OD^2;\ O_1D^2=\left(SO-O_1D\right)^2+OD^2;$$

$$O_1D^2=SO^2-2SO\cdot O_1D+O_1D^2+OD^2;$$

$$2SO\cdot O_1D=SO^2+OD^2;$$

$$O_1D=\frac{SO^2+OD^2}{2SO}.$$

Тоді

$$O_1D=\frac{\frac{1}{4\,\mathrm{tg}^2\,\alpha}\cdot\frac{S\sqrt{2}}{\mathrm{ctg}\,\alpha}+\frac{S\sqrt{2}}{4\,\mathrm{ctg}\,\alpha}}{2\cdot\frac{1}{2\,\mathrm{tg}\,\alpha}\sqrt{\frac{S\sqrt{2}}{\mathrm{ctg}\,\alpha}}}=\frac{S\sqrt{2}}{4\,\mathrm{ctg}\,\alpha}\cdot\left(\frac{1}{\mathrm{tg}^2\,\alpha}+1\right)\cdot\frac{\mathrm{tg}\,\alpha}{\sqrt{\frac{S\sqrt{2}}{\mathrm{ctg}\,\alpha}}}=$$

$$=\frac{1}{4}\sqrt{\frac{S\sqrt{2}}{\mathrm{ctg}\,\alpha}}\cdot\left(1+\mathrm{ctg}^2\,\alpha\right)\cdot\mathrm{tg}\,\alpha=\frac{1}{4}\sqrt{\frac{S\sqrt{2}}{\mathrm{ctg}\,\alpha}}\cdot\frac{1}{\sin^2\alpha}\cdot\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=$$

$$=\frac{1}{4}\sqrt{\frac{S\sqrt{2}}{\mathrm{ctg}\,\alpha}}\cdot\frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha}=\frac{1}{2}\sqrt{S\sqrt{2}\,\mathrm{tg}\,\alpha}\cdot\frac{1}{\sin 2\alpha}=\frac{\sqrt{S\sqrt{2}\,\mathrm{tg}\,\alpha}}{2\sin 2\alpha}.$$

Відповідь. $\dfrac{\sqrt{S\sqrt{2}\,\mathrm{tg}\,\alpha}}{2\sin 2\alpha}$.

Варіант 2

Завдання, №	1	2	3	4	5	6
Відповідь	Д	В	Г	Д	В	А

Завдання, №	7	8	9	10	11
Відповідь	1–Г, 2–Д, 3–Б, 4–В	1. 18,75. 2. 281,25	864	135	64

Завдання 12. $\dfrac{2\sin^2\dfrac{\gamma}{2}+1}{4\sin\dfrac{\gamma}{2}}\sqrt{S\operatorname{tg}\dfrac{\gamma}{2}}$.

ТЕСТ 4
Координати та вектори

Варіант 1

Завдання, №	1	2	3	4	5	6
Відповідь	Г	Б	Д	В	Д	В

Завдання, №	7	8	9	10	11
Відповідь	1–В, 2–Д, 3–А, 4–Б	1. 17. 2. 54	9	452	48

Базовий рівень

10. Знайдіть квадрат довжини діагоналі AC паралелограма $ABCD$, якщо $A(-1;-5;11)$, $B(1;1;9)$, $D(5;-3;-5)$.

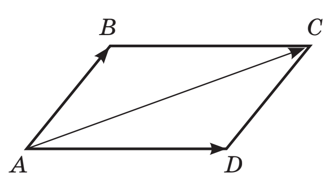
Розв'язання

Знайдемо координати векторів $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AD}$. Маємо:

$$\overrightarrow{AB}(2;6;-2);\ \overrightarrow{AD}(6;2;-16).$$

За «правилом паралелограма» (*див. рис.*) дістанемо

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}.$$



Маємо:

$$\overrightarrow{AC}(2+6;6+2;-2-16);\ \overrightarrow{AC}(8;8;-18).$$

Тоді

$$\left|\overrightarrow{AC}\right|^2=8^2+8^2+(-18)^2=452,$$

тобто $AC^2=452$.

Відповідь. 452.

Зауваження. Цю задачу можна розв'язати в інший спосіб. Спочатку знайти координати точки O — точки перетину діагоналей паралелограма, O — середина BD. Потім нескладно знайти координати точки C. Тоді можна знайти квадрат відстані між точками A і C.

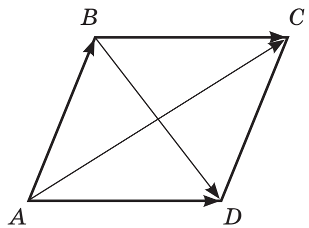
Поглиблений рівень

11. Обчисліть площу паралелограма $ABCD$, якщо

$$\overrightarrow{AB}\left(2\sqrt[4]{6};-4\sqrt[4]{6};0\right),\ \overrightarrow{AC}\left(4\sqrt[4]{6};-4\sqrt[4]{6};4\sqrt[4]{6}\right).$$

Розв'язання

Оскільки $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$ (*див. рис.*), то $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$.



Маємо:

$$\overrightarrow{BC}\left(4\sqrt[4]{6}-2\sqrt[4]{6};-4\sqrt[4]{6}+4\sqrt[4]{6};4\sqrt[4]{6}-0\right);$$

$$\overrightarrow{BC}\left(2\sqrt[4]{6};0;4\sqrt[4]{6}\right);\ \overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD};\ \overrightarrow{AD}\left(2\sqrt[4]{6};0;4\sqrt[4]{6}\right).$$

Знайдемо координати вектора $\overrightarrow{BD}$.

Маємо:

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD};\ \overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB};\ \overrightarrow{BD}\left(0;4\sqrt[4]{6};4\sqrt[4]{6}\right).$$

Оскільки

$$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=4\sqrt[4]{6}\cdot 0-4\sqrt[4]{6}\cdot 4\sqrt[4]{6}+4\sqrt[4]{6}\cdot 4\sqrt[4]{6}=0,$$

то $AC\perp BD$. Тому паралелограм $ABCD$ — ромб. Тоді

$$S_{ABCD}=\frac{AC\cdot BD}{2}.$$

Маємо:

$$\left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{16\sqrt{6}+16\sqrt{6}+16\sqrt{6}} = \sqrt{48\sqrt{6}} = 4\sqrt{3\sqrt{6}};$$

$$\left|\overrightarrow{BD}\right| = \sqrt{0+16\sqrt{6}+16\sqrt{6}} = \sqrt{32\sqrt{6}} = 4\sqrt{2\sqrt{6}}.$$

Отже,

$$S_{ABCD} = \frac{4\sqrt{3\sqrt{6}}\cdot 4\sqrt{2\sqrt{6}}}{2} = \frac{16\cdot\sqrt{36}}{2} = 48.$$

Відповідь. 48.

12. Точки $A(4;0;2)$, $B(4;3;-2)$ і $C(4;0;-2)$ — вершини трикутника, AL і BN — бісектриси цього трикутника. Знайдіть кут між векторами $\overrightarrow{AL}$ і $\overrightarrow{BN}$.

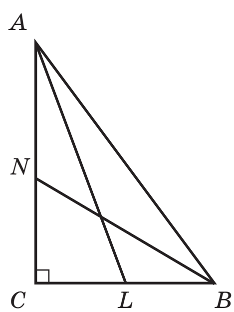
Розв'язання

Маємо:

$$\overrightarrow{AC}(0;0;4),\ \overrightarrow{BC}(0;-3;0),\ \overrightarrow{AB}(0;3;-4);$$

$$\left|\overrightarrow{AC}\right| = 4;\ \left|\overrightarrow{BC}\right| = 3;\ \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5.$$

Оскільки $AC^2 + BC^2 = AB^2$, то трикутник ABC — прямокутний (*див. рис.*), $\angle ACB = 90^\circ$.



Якщо AL — бісектриса трикутника, то

$$\frac{AC}{AB} = \frac{CL}{LB} = \frac{4}{5}.$$

Знайдемо координати точки L.

Маємо:

$$x_L = \frac{4+\frac{4}{5}\cdot 4}{1+\frac{4}{5}} = \frac{\frac{36}{5}}{\frac{9}{5}} = 4,\ y_L = \frac{0+\frac{4}{5}\cdot 3}{1+\frac{4}{5}} = \frac{\frac{12}{5}}{\frac{9}{5}} = \frac{4}{3},$$

$$z_L=\frac{-2+\frac{4}{5}\cdot(-2)}{1+\frac{4}{5}}=\frac{-\frac{18}{5}}{\frac{9}{5}}=-2;\ L\left(4;\frac{4}{3};-2\right).$$

Оскільки BN — бісектриса трикутника, то

$$\frac{AB}{BC}=\frac{AN}{NC}=\frac{5}{3}.$$

Тоді

$$x_N=\frac{4+\frac{5}{3}\cdot4}{1+\frac{5}{3}}=\frac{\frac{32}{3}}{\frac{8}{3}}=4,\ y_N=\frac{0+\frac{5}{3}\cdot0}{1+\frac{5}{3}}=0,$$

$$z_N=\frac{2+\frac{5}{3}\cdot(-2)}{1+\frac{5}{3}}=\frac{-\frac{4}{3}}{\frac{8}{3}}=-\frac{1}{2};$$

$$N\left(4;0;-\frac{1}{2}\right).$$

Маємо:

$$\overrightarrow{AL}\left(0;\frac{4}{3};-4\right);\ \overrightarrow{BN}\left(0;-3;\frac{3}{2}\right);$$

$$\left|\overrightarrow{AL}\right|=\sqrt{\frac{16}{9}+16}=4\sqrt{\frac{10}{9}}=\frac{4\sqrt{10}}{3};$$

$$\left|\overrightarrow{BN}\right|=\sqrt{9+\frac{9}{4}}=3\sqrt{\frac{5}{4}}=\frac{3\sqrt{5}}{2};$$

$$\overrightarrow{AL}\cdot\overrightarrow{BN}=0\cdot0+\frac{4}{3}\cdot(-3)+(-4)\cdot\frac{3}{2}=-4-6=-10.$$

Позначимо кут між векторами $\overrightarrow{AL}$ і $\overrightarrow{BN}$ через φ. Отже,

$$\cos\varphi=\frac{\overrightarrow{AL}\cdot\overrightarrow{BN}}{\left|\overrightarrow{AL}\right|\cdot\left|\overrightarrow{BN}\right|}=\frac{-10}{\frac{4\sqrt{10}}{3}\cdot\frac{3\sqrt{5}}{2}}=-\frac{10}{2\cdot5\sqrt{2}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Звідси

$$\varphi=\arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\pi-\arccos\frac{1}{\sqrt{2}}=\pi-\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}.$$

Відповідь. $\frac{3\pi}{4}$.

Варіант 2

Завдання, №	1	2	3	4	5	6
Відповідь	Д	В	В	Б	Д	Г

Завдання, №	7	8	9	10	11
Відповідь	1–Д, 2–Б, 3–А, 4–Г	1. 25. 2. −182	−29	161	12

Завдання 12. $\pi - \arccos\frac{\sqrt{10}}{10}$.

РОЗДІЛ 3. Підсумковий тест

ТЕСТ 1

Завдання, №	1	2	3	4	5
Відповідь	В	Г	Б	Д	А

Завдання, №	6	7	8	9	10
Відповідь	Г	Д	Г	Б	В

Завдання, №	11	12	13	14	15
Відповідь	Д	Б	Г	В	В

Завдання, №	16	17	18	19	20
Відповідь	Д	Б	Г	В	Б

Завдання, №	21	22	23	24	25
Відповідь	1–А, 2–В, 3–Г, 4–Б	1–В, 2–Б, 3–Д, 4–А	1–А, 2–В, 3–Д, 4–Б	1–В, 2–А, 3–Д, 4–Г	1. 12. 2. 7

Завдання, №	26	27	28	29	30
Відповідь	1. 26. 2. 68	−6,48	33	32	17

Завдання, №	31	32	33	34
Відповідь	1,75	300	91,125	42

Завдання 35. 2. 96 см^2.

Завдання 36. $a \in \left(3\sqrt{3};27\right)$.

ТЕСТ 2

Завдання, №	1	2	3	4	5
Відповідь	Б	А	Д	Г	Г

Завдання, №	6	7	8	9	10
Відповідь	А	Г	В	Д	В

Завдання, №	11	12	13	14	15
Відповідь	Д	Б	В	Д	В

Завдання, №	16	17	18	19	20
Відповідь	Б	Б	Д	Г	В

Завдання, №	21	22	23	24	25
Відповідь	1–В, 2–А, 3–Б, 4–Д	1–В, 2–Г, 3–Д, 4–А	1–Г, 2–В, 3–Д, 4–А	1–Б, 2–Д, 3–А,4–В	1. 16. 2. 500

Завдання, №	26	27	28	29	30
Відповідь	1. 104. 2. 240	–8	14	–15,25	40

Завдання, №	31	32	33	34
Відповідь	0,025	480	6	60

Завдання 35. 2. $2\sqrt{3}$ см^2.

Завдання 36. $a \in \left(-\frac{1}{2};-\frac{13}{40}\right) \cup \left(-\frac{13}{40};-\frac{1}{5}\right) \cup \left(-\frac{1}{8};0\right)$.

ДЛЯ НОТАТОК

ДЛЯ НОТАТОК

Навчальне видання

Бібліотека журналу «Математика в школах України»
Випуск 10 (154)

КАРПІК Вадим Вітальйович

ТЕСТОВИЙ КОНТРОЛЬ. ГЕОМЕТРІЯ. ПІДГОТОВКА ДО ЗНО

Навчально-методичний посібник

Головний редактор *І. С. Маркова*
Редактор *Г. О. Новак*
Коректор *О. М. Журенко*
Комп'ютерне верстання *О. В. Лєбєдєва*

Підп. до друку 16.10.2015. Формат 60×90/16. Папір офсет.
Гарнітура Шкільна. Друк офсет. Ум. друк. арк. 7,0. Зам. № 15-10/19-04.
ТОВ «Видавнича група "Основа"».

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи КВ № 11392–265Р від 25.07.2007.
Україна, 61001 Харків, вул. Плеханівська, 66.
Тел. (057) 731-96-32. E-mail: math@osnova.com.ua
Віддруковано з готових плівок ТОВ «Тріада Принт»
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 1870 від 16.07.2007.
Харків, вул. Киргизька, 19. Тел.: (057) 757-98-16, 757-98-15.

ДЛЯ ВЧИТЕЛІВ, ЯКІ ГОТУЮТЬСЯ ДО УРОКІВ ЗА КОМП'ЮТЕРОМ!

- Ви сучасний учитель?
- Готуєтеся до уроків за комп'ютером?
- Прагнете заощадити час та гроші?

Скачуйте книги ВГ«Основа» в електронному вигляді на сайті www.e-kniga.in.ua

Редагуйте та створюйте власні розробки уроків!

ЕЛЕКТРОННІ КНИГИ

Тут ви знайдете:

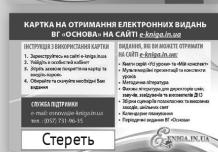
- книги серії «Усі уроки», «Мій конспект», «Електронний конструктор уроку»;
- готові конспекти уроків та мультимедійні презентації до них;
- фахові науково-методичні посібники серії «Бібліотека журналу…»;
- зручні способи оплати: SMS, WebMoney, банківські картки Visa та MasterCard;
- детальна інформація про кожну книгу;
- та інше.

Увага! Новинка сезону — скретч-картка від сайту www.e-kniga.in.ua!

3 причини, чому картка e-kniga — це вигідно:

1. Скачування обраного матеріалу, не відходячи від ком'ютера, швидко та легко!
2. Чудовий подарунок колезі до будь-якого свята!
3. Бонуси за покупки!

На картці ви знайдете детальну інструкцію з використання.



Крокуйте в ногу з сучасністю! Замовляйте картки та користуйтеся всіма перевагами!

Замовляйте картки:
• за тел.: (057) 731-96-35 • на сайті: http://book.osnova.com.ua

Код: **ЕСК1** Ціна **50 грн**

УВАГА! На сайті функціонує система накопичення бонусів за покупки!

Відтепер, сплачуючи за товари банківською карткою або через систему WebMoney, ви отримуєте бонусні гривні на особистий рахунок*.

За придбання картки e-kniga номіналом 50 грн також нараховуються бонуси (за умови, якщо вона була оплачена банківською карткою або через WebMoney).

* Близько 10 % від суми замовлення.

ЗАХОДЬТЕ ТА КОРИСТУЙТЕСЯ! МИ ЗРОБИЛИ ЦЕ ДЛЯ ВАС!

www.e-kniga.in.ua