



РОЗВ'ЯЗКИ ДО ТРЕНУВАЛЬНИХ ВПРАВ

Заняття №6 «Скалярний добуток векторів»

1) Знайдіть скалярний добуток векторів:

А) $\vec{a}(2; -1)$ і $\vec{b}(4; 3)$

Б) $|\vec{a}| = 1$ $|\vec{b}| = 7$, $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 45^\circ$

В) $|\vec{a}| = 8$ $|\vec{b}| = 11$, $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 150^\circ$

Розв'язок

А) Застосуємо теорему про скалярний добуток векторів за координатами:

$$\vec{a}(2; -1) \cdot \vec{b}(4; 3) = 2 \cdot 4 + (-1) \cdot 3 = 8 - 3 = 5$$

Знайдемо скалярний добуток векторів за допомогою кута між ними:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \angle(\vec{a}, \vec{b})$$

Б) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \cdot 7 \cdot \cos 45^\circ = 7 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{7\sqrt{2}}{2}$

В) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 8 \cdot 11 \cdot \cos 150^\circ = 88 \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -44\sqrt{3}$

$$\cos 150^\circ = \cos(180^\circ - 30^\circ) = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

2) Дано вектори $\vec{n}(7; -y)$ і $\vec{m}(4; 6)$. При якому значенні y виконується рівність $\vec{n} \cdot \vec{m} = -14$?

Розв'язок

Використовуємо означення скалярного добутку за координатами:

$$\vec{n} \cdot \vec{m} = 7 \cdot 4 + (-y) \cdot 6$$

$$28 - 6y = -14$$

$$-6y = -14 - 28$$

$$-6y = -42$$

$$y = 7$$

Відповідь: $y = 7$

3) При якому значенні x вектори $\vec{m}(-3; 6)$ і $\vec{n}(x; 9)$ будуть взаємно перпендикулярними?

Розв'язок

За наслідком із скалярного добутку маємо: два ненульові вектори перпендикулярні тоді і тільки тоді, коли сума добутків їх відповідних координат дорівнює нулю, отже:

$$\vec{m} \cdot \vec{n} = -3x + 54$$

$$-3x + 54 = 0$$

$$-3x = -54$$

$$x = 18$$

Відповідь: $\vec{m} \perp \vec{n}$, якщо $x = 18$

4) Дано вектори $\vec{a} (8; y)$ і $\vec{c} (-6; 3)$. При яких значеннях y кут між векторами $\vec{a}$ та $\vec{c}$: 1) гострий; 2) прямий; 3) тупий?

Розв'язок

Розглянемо можливі випадки:

А) якщо $\vec{a} \cdot \vec{c} > 0$, то кут між векторами гострий;

Б) якщо $\vec{a} \cdot \vec{c} < 0$, то кут між векторами тупий;

В) якщо $\vec{a} \cdot \vec{c} = 0$, то кут між векторами прямий.

Нехай $\vec{a} \cdot \vec{c} > 0$, тоді $\vec{a} \cdot \vec{c} = 8 \cdot (-6) + y \cdot 3 = -48 + 3y$

$$-48 + 3y > 0$$

$$3y > 48$$

$$y > 16$$

Отже, при $y \in (16; +\infty)$ кут між векторами буде гострий

Нехай $\vec{a} \cdot \vec{c} < 0$, тоді $\vec{a} \cdot \vec{c} = -48 + 3y$

$$-48 + 3y < 0$$

$$3y < 48$$

$$y < 16$$

Отже, при $y \in (-\infty; 16)$ кут між векторами буде тупий

Нехай $\vec{a} \cdot \vec{c} = 0$, тоді $\vec{a} \cdot \vec{c} = -48 + 3y$

$$-48 + 3y = 0$$

$$3y = 48$$

$$y = 16$$

Отже, при $y = 16$ кут між векторами буде прямий.

Відповідь: при $y \in (16; +\infty)$ кут гострий; при $y \in (-\infty; 16)$ кут тупий; при $y = 16$ кут прямий

5) Яким трикутником - гострокутним, тупокутним чи прямокутним — є трикутник ABC, якщо A (-1; 2), B (3; 7), C (2;-1)?

Розв'язок

Щоб відповісти на запитання задачі знайдемо довжини векторів, які визначають сторони трикутника

$$\overrightarrow{AB} = (3 + 1; 7 - 2) = (4; 5)$$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{4^2 + 5^2} = \sqrt{41}$$

$$\overrightarrow{AC} = (2 + 1; -1 - 2) = (3; -3)$$

$$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{3^2 + (-3)^2} = \sqrt{18}$$

$$\overrightarrow{BC} = (2 - 3; -1 - 7) = (-1; -8)$$

$$|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{(-1)^2 + (-8)^2} = \sqrt{1 + 64} = \sqrt{65}$$

Порівнюємо довжини сторін. Сторона BC є найбільшою.

За співвідношеннями у трикутнику випливає, що $\angle A$ – найбільший кут (бо лежить навпроти більшої сторони)

Застосуємо теорему косинусів щоб знайти $\cos \angle A$

$$|BC|^2 = |AB|^2 + |AC|^2 - 2|AB| \cdot |AC| \cdot \cos \angle A$$

$$\cos \angle A = \frac{|AB|^2 + |AC|^2 - |BC|^2}{2|AB| \cdot |AC|}$$

$$\cos \angle A = \frac{\sqrt{41}^2 + \sqrt{18}^2 - \sqrt{65}^2}{2\sqrt{41} \cdot \sqrt{18}}$$

$$\cos \angle A = \frac{41 + 18 - 65}{2\sqrt{41} \cdot \sqrt{18}}$$

$$\cos \angle A = \frac{-6}{2\sqrt{41} \cdot \sqrt{18}}$$

$$\cos \angle A < 0$$

За наслідком зі скалярного добутку маємо: якщо косинус кута між векторами від'ємний, то кут буде тупий.

Отже, $\triangle ABC$ - тупокутний

Відповідь: $\triangle ABC$ - тупокутний

6) Дано: $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = \sqrt{3}$, $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 150^\circ$. Знайдіть:

1) $|\vec{a} - \vec{b}|$

2) $|2\vec{a} + 3\vec{b}|$

Розв'язок

Застосуємо властивості скалярного добутку векторів, формулу квадрата різниці та властивості скалярного квадрата, отримаємо:

$$1) |\vec{a} - \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 - 2\vec{a}\vec{b} + |\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 - 2 \cdot |\vec{a}| |\vec{b}| \cos 150^\circ + |\vec{b}|^2 = 4^2 - 2 \cdot 4 \cdot \sqrt{3} \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + (\sqrt{3})^2 = 19 - 8\sqrt{3} \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 19 + 12 = 31$$

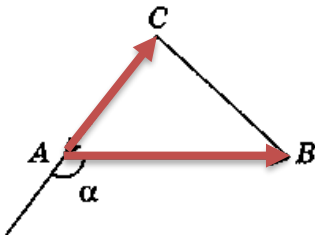
$$|\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{31}$$

$$2) |2\vec{a} + 3\vec{b}|^2 = 4|\vec{a}|^2 + 2 \cdot 2\vec{a} \cdot 3\vec{b} + 9|\vec{b}|^2 = 4|\vec{a}|^2 + 12 \cdot |\vec{a}| |\vec{b}| \cos 150^\circ + 9|\vec{b}|^2 = 4 \cdot 16 + 12 \cdot 4 \cdot \sqrt{3} \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 9 \cdot 3 = 64 - 72 + 27 = 19$$

$$|2\vec{a} + 3\vec{b}| = \sqrt{19}$$

7) Трикутник ABC задано координатами його вершин: $A(0;2)$, $B(1;3)$, $C(2;2)$.

Знайдіть зовнішній кут при вершині A .



Дано: $\triangle ABC$

$A(0;2)$, $B(1;3)$, $C(2;2)$

Знайти: $\angle \alpha$

Розв'язок

Розглянемо $\triangle ABC$. За допомогою скалярного добутка знайдемо $\angle A$

$$\overrightarrow{AB} = (1 - 0; 3 - 2) = (1; 1)$$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$\overrightarrow{AC} = (2 - 0; 2 - 2) = (2; 0)$$

$$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{2^2 + 0^2} = \sqrt{4} = 2$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 1 \cdot 2 + 1 \cdot 0 = 2$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cos \angle CAB$$

$$\cos \angle CAB = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}|}$$

$$\cos \angle CAB = \frac{2}{2 \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\angle CAB = 45^\circ$$

За властивістю зовнішнього кута трикутника маємо:

$$\angle \alpha = 180^\circ - \angle CAB = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$$

Відповідь. 135° .

