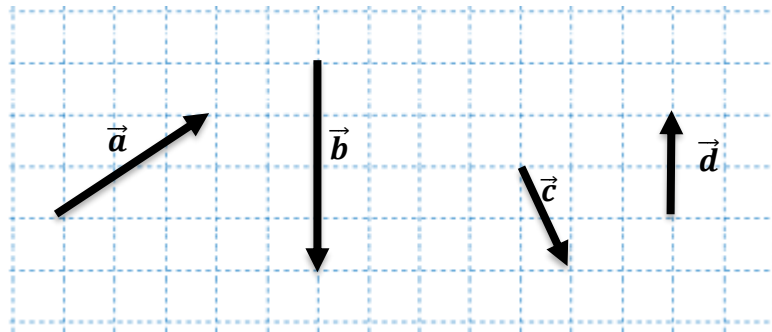




РОЗВ'ЯЗКИ ДО ТРЕНУВАЛЬНИХ ВПРАВ

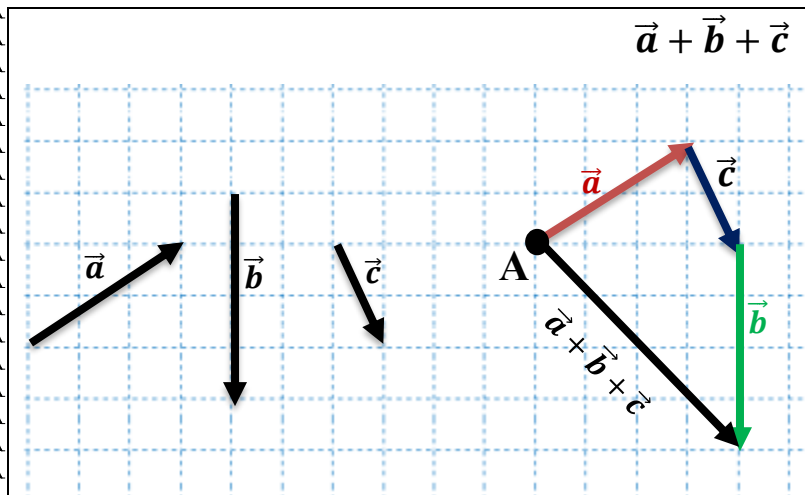
Заняття №4 «Додавання та віднімання вектора»

1) Дано вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$. Побудуйте вектори $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{c} - \vec{d}$, $\vec{b} + \vec{d}$, $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$



Розв'язок

Побудова	Пояснення
$\vec{a} + \vec{b}$	1) Побудуємо вектор, що дорівнює вектору $\vec{a}$ та бере початок в кінці вектора $\vec{b}$; 2) Побудуємо вектор, який з'єднує початок вектора $\vec{b}$ та кінець вектора $\vec{a}$.
$\vec{c} - \vec{d}$	1) Оберемо довільну точку A. 2) Від точки A відкладемо вектор, що дорівнює вектору $\vec{d}$; 3) Від точки A відкладемо вектор, що дорівнює вектору $\vec{c}$; 4) Побудуємо вектор, який з'єднує початок вектора $\vec{d}$ та кінець вектора $\vec{c}$.
$\vec{b} + \vec{d}$	Вектори $\vec{b}$ та $\vec{d}$ колінеарні 1) Оберемо довільну точку B; 2) Від точки B відкладемо вектор, що дорівнює вектору $\vec{b}$; 3) Від кінця вектора $\vec{b}$ відкладемо вектор, що дорівнює вектору $\vec{d}$; 4) Побудуємо вектор, що має за початок точку B та кінець у кінці вектора $\vec{d}$.

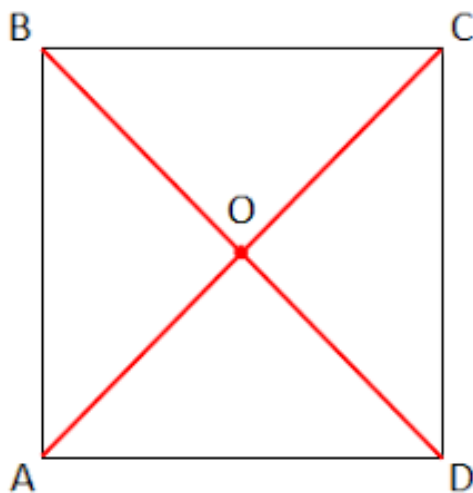


- 1) Оберемо довільну точку A .
- 2) Від точки A відкладемо вектор, що дорівнює вектору $\vec{a}$;
- 3) Від кінця вектора $\vec{a}$ відкладемо вектор, що дорівнює вектору $\vec{c}$;
- 4) Від кінця вектора $\vec{c}$ відкладемо вектор, що дорівнює вектору $\vec{b}$;
- 5) Побудуємо вектор, що має за початок точку A та кінець у кінці вектора $\vec{b}$.

2) Чотирикутник $ABCD$ - квадрат, O - точка перетину його діагоналей. Серед даних пар векторів укажіть пари протилежних векторів:

1) $\overrightarrow{AB}$ та $\overrightarrow{CB}$;	3) $\overrightarrow{BC}$ та $\overrightarrow{AD}$;	5) $\overrightarrow{OB}$ та $\overrightarrow{OC}$;
2) $\overrightarrow{BA}$ та $\overrightarrow{CD}$;	4) $\overrightarrow{OA}$ та $\overrightarrow{OC}$;	6) $\overrightarrow{BD}$ та $\overrightarrow{DB}$.

Розв'язок



- 1) $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CB}|$, як сторони квадрата;
- 2) $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$, бо $|\overrightarrow{BA}| = |\overrightarrow{CD}|$ та $\overrightarrow{BA} \uparrow \overrightarrow{CD}$;
- 3) $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$, бо $|\overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{AD}|$ та $\overrightarrow{BC} \uparrow \overrightarrow{AD}$;
- 4) $|\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{OC}|$, бо діагоналі квадрата точкою перетину діляться навпіл. $\overrightarrow{OA} \updownarrow \overrightarrow{OC}$;
- 5) $|\overrightarrow{OB}| = |\overrightarrow{OD}|$, бо діагоналі квадрата точкою перетину діляться навпіл;
- 6) $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{DB}$, бо $|\overrightarrow{BD}| = |\overrightarrow{DB}|$ та $\overrightarrow{BD} \updownarrow \overrightarrow{DB}$.

Відповідь: 4) $\overrightarrow{OA} \updownarrow \overrightarrow{OC}$; 6) $\overrightarrow{BD} \updownarrow \overrightarrow{DB}$

3) Дано точки $A(-1; 4)$, $B(0; -2)$, $C(3; 5)$. Знайдіть координати вектора:

А) $\overrightarrow{AB} + \vec{a}$, якщо $\vec{a}(0; -2)$; Б) $\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AB}$; В) $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$.

Розв'язок

А) За допомогою означення координат вектора знайдемо координати $\overrightarrow{AB}$:

$$\overrightarrow{AB} = (0 + 1; -2 - 4) = \overrightarrow{(1; -6)}$$

$$\overrightarrow{AB} + \vec{a} = (1 + 0; -6 - 2) = \overrightarrow{(1; -8)}.$$

Б) $\overrightarrow{CB} = (0 - 3; -2 - 5) = \overrightarrow{(-3; -7)}$

$$\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AB} = (-3 + 1; -7 - 6) = \overrightarrow{(-2; -13)}.$$

В) $\overrightarrow{AC} = (3 + 1; 5 - 4) = \overrightarrow{(4; 1)}$

$$\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = (4 - 1; 1 + 6) = \overrightarrow{(3; 7)}.$$

Відповідь: А) $\overrightarrow{(1; -8)}$; Б) $\overrightarrow{(-2; -13)}$; В) $\overrightarrow{(3; 7)}$.

4) Знайдіть координати векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо їхня сума має координати $(-4; 5)$, а різниця $(2; 7)$.

Розв'язок

Нехай вектори мають координати: $\vec{a}(x_1; y_1)$ та $\vec{b}(x_2; y_2)$.

Застосуємо правила додавання та віднімання векторів за допомогою координат:

За правилом додавання: $\vec{a} + \vec{b} = (x_1 + x_2; y_1 + y_2) = \overrightarrow{(-4; 5)}$.

За правилом різниці: $\vec{a} - \vec{b} = (x_1 - x_2; y_1 - y_2) = \overrightarrow{(2; 7)}$.

Маємо системи:

$$+ \begin{cases} x_1 + x_2 = -4, \\ x_1 - x_2 = 2; \end{cases}$$

$$2x_1 = -2,$$

$$x_1 = -1;$$

$$-1 + x_2 = -4,$$

$$x_2 = -3.$$

$$+ \begin{cases} y_1 + y_2 = 5, \\ y_1 - y_2 = 7; \end{cases}$$

$$2y_1 = 12,$$

$$y_1 = 6;$$

$$6 + y_2 = 5,$$

$$y_2 = -1,$$

Отже, $\vec{a}(-1; 6)$ та $\vec{b}(-3; -1)$.

Відповідь: $\vec{a}(-1; 6)$ та $\vec{b}(-3; -1)$.

5) Дано вектори $\vec{c}(-3; 1)$ і $\vec{d}(5; -6)$. Знайдіть:

А) $\vec{c} + \vec{d}$; Б) $\vec{c} - \vec{d}$; В) $|\vec{c} + \vec{d}|$; Г) $|\vec{c} - \vec{d}|$

Розв'язок

А) $\vec{c} + \vec{d} = (-3 + 5; 1 - 6) = \overrightarrow{(2; -5)}$;

Б) $\vec{c} - \vec{d} = (-3 - 5; 1 + 6) = \overrightarrow{(-8; 7)}$;

В) $|\vec{c} + \vec{d}| = \sqrt{2^2 + (-5)^2} = \sqrt{4 + 25} = \sqrt{29}$;

Г) $|\vec{c} - \vec{d}| = \sqrt{(-8)^2 + 7^2} = \sqrt{64 + 49} = \sqrt{113}$.

6) Дано точки $A(0; -8)$ і $B(10; 0)$. Знайдіть координати точки K такої, що $\overrightarrow{AK} - \overrightarrow{KB} = \vec{0}$

Розв'язок

Нехай координати точки $K(x; y)$.

Знайдемо координати векторів:

$$\overrightarrow{AK} = (x - 0; y + 8) = \overrightarrow{(x; y + 8)}$$

$$\overrightarrow{KB} = (10 - x; 0 - y) = \overrightarrow{(10 - x; -y)}$$

За умовою $\overrightarrow{AK} - \overrightarrow{KB} = \vec{0}$, маємо:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AK} - \overrightarrow{KB} &= (x - (10 - x); y + 8 - (-y)) = (x - 10 + x; y + 8 + y) \\ &= \overrightarrow{(2x - 10; 2y + 8)}\end{aligned}$$

$$\overrightarrow{(2x - 10; 2y + 8)} = \overrightarrow{(0; 0)}$$

Маємо: $\begin{cases} 2x - 10 = 0, \\ 2y + 8 = 0; \end{cases}$

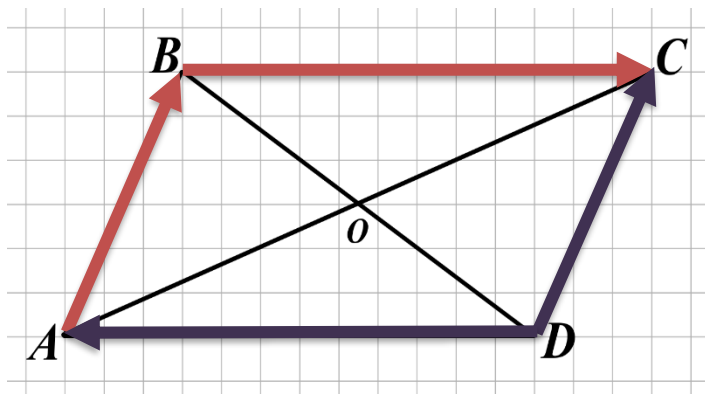
$$\begin{cases} 2x = 10, \\ 2y = -8; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 5, \\ y = -4. \end{cases}$$

Відповідь: $x = 5, y = -4$.

7) Чотирикутник ABCD – паралелограм. Чи рівні суми векторів $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ і $\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DA}$

Розв'язок



Дано: ABCD – паралелограм

Чи рівні суми $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ та $\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DA}$

Доведення

Розглянемо вектори $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{DA}$.

За правилом трикутника знайдемо суму векторів: з трикутника ABC,

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}.$$

За правилом паралелограма знайдемо суму векторів:

$$\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{DB}.$$

За властивостями діагоналей паралелограма, маємо:

$$|\overrightarrow{DB}| \neq |\overrightarrow{AC}|.$$

Отже, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} \neq \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DA}$

Відповідь: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} \neq \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DA}$

